مبانی علوم ریاضی

مبانی علوم ریاضی

تألیف

دکتر محمدحسن بیژن‌زاده دکتر محبوبه حسینی یزدی

دکتر شهریار فرهمندراد دکتر محمد چایچی

۱۳۸۹

هدفهای آموزشی-رفتاری

خواننده بعد از مطالعهٔ این فصل باید بتواند:

۱) تعاریف را دانسته پایه و پشتوانه منطق دوارزشی را بلد باشد.

۲) جدول‌های ارزش نقیض یک گزاره، ترکیب عطفی دو گزاره، ترکیب فصلی دو گزاره را تشکیل دهد.

۳) دلایل متقنی برای مقادیر درستی ترکیب شرطی دو گزاره ارائه دهد.

۴) جدول ارزش‌یابی مانع جمع و ترکیب دو شرطی را توصیف کند.

۵) الفاظی را که در منطق دوارزشی مترادف دارند بشناسد.

۶) مقدم و تالی را درگزاره‌های شرطی شناخته و شرط لازم، شرط کافی و شرط لازم وکافی را همراه با دلیل در هر حالت بیان کند.

۷) الگوی هر تعریف در ریاضیات را به صورت ترکیب دو شرطی بنویسد.

۸) شماره سطر جدول ارزش را به مبنای دو بر ده در پایان صفر را به (ن) و ۱ را به (د) تبدیل و به این ترتیب هر جدول ارزش حتی با ابعاد بزرگ را به طور منظم قادر به تشکیل باشد.

۹) توصیفی کاملاً دقیق از تساوی و هم ارزی دو گزاره بیان نموده فرق آنها را بشناسد.

۱۰) همراه با دلیل بیان کند که هم‌ارزی گزاره‌ها رابطه‌ای هم‌ارزی است.

۱۱) گزاره‌های همیشه درست وگزاره‌های همیشه نادرست را تعریف کند.

۱۲) الگوی گزاره‌های همیشه درست و الگوی گزاره‌های همیشه نادرست را ارائه دهد.

۱۳) تشخیص دهد در ریاضیات هر «قضیه» گزاره‌ای همیشه درست و «برهان» قضیه، اثبات درستی آن است.

۱۴) هدف از دانستن جبرگزاره‌ها را بیان نموده و فرمول‌های ارائه شده در آن را به خاطر بسپارد.

۱۵) فرق $\cong$ و $\Longleftrightarrow$ را بیان کند. (فرق دو گزاره معادل با دو گزارهٔ هم ارز منطقی)

۱۶) قراردادهای پرانتزگذاری در فرمول‌های گزاره‌ای و اولویت‌های عملکرد رابط‌های گزاره‌ای را شرح دهد.

۱۷) سورها را تعریف و نقش هر یک از آنها را همراه با دامنهٔ عملشان بیان کند.

۱۸) قواعد صحیح نوشتن و پرانتزگذاری گزاره‌های سوری را ارائه دهد.

۱۹) نقیض گزاره‌های سوری را بنویسد.

۲۰) اسمنما را تعریف کند.

۲۱) گزاره‌نما را تعریف و فرق آن را با اسمنما بیان کند.

۲۲) متغیر آزاد گزاره‌نما را تعریف کند.

۲۳) کاربرد سورها را بشناسد.

۲۴) روش اثبات گزاره‌های از نوع $p \Longrightarrow q$ را ارائه نماید.

۲۵) روش اثبات گزاره‌های از نوع $p \Longleftrightarrow q$ را بیان کند.

۲۶) شیوهٔ اثبات جمله‌هایی به فرم $\forall x p(x)$ را شرح دهد.

۲۷) روش اثبات جمله‌هایی از نوع $\exists x p(x)$ را بیان کند.

۲۸) اثبات به روش در نظرگرفتن همهٔ حالت‌های ممکن را شرح دهد.

۲۹) اثبات به وسیله استقرا و روش اثبات احکام با برهان خلف را بیان کند.

۳۰) شیوهٔ اثبات جمله‌هایی از نوع $\exists! p(x)$ را ارائه نماید.

۳۱) به طورکلی طرز تفکر صحیح در شیوه اثبات احکام ریاضی و روشهایی از نوع سعی و خطا را تحلیل کند.

۳۲) انگیزهٔ ایجاد و ارائه منطق $\sim$ ارزشی را بیان کند.

۳۳) خصوصیت monotonictity را در منطق $\sim$ ارزشی شرح دهد.

۳۴) سیستم قوی Kleene و ارزش سوم در نظرگرفته شده در این سیستم را شرح دهد.

۳۵) سیستم ضعیف Kleene را تشریح کند.

۳۶) سیستم میانی Kleene را بیان کند.

۳۷) مشکل هر سه سیستم قوی، ضعیف و میانی Kleene را ارائه دهد.

۳۸) اصول اولیه منطق فازی و انگیزهٔ ایجاد این منطق را بیان کند.

۳۹) ارزش گزاره‌های مرکب ساخته شده با ۸، ۷، $\Longrightarrow$ و $\Longleftrightarrow$ وگزارهٔ $\sim p$ را در منطق فازی شرح دهد.

۴۰) کاربردهایی از منطق فازی را بیان کند.

۴۱) مجموعه را تعریف کرده اشکالات تعریف را ارائه دهد.

۴۲) علامت عضویت و مجموعهٔ تهی را شرح دهد.

۴۳) تعریف مجموعه‌های متعارف و نامتعارف را ارائه نماید.

۴۴) اشکال تعریف مجموعهٔ مجموعه‌های متعارف را بیان کند.

۴۵) مفاهیمی مانند تساوی مجموعه‌ها و زیرمجموعه و زیرمجموعهٔ محض را تشریح کند.

۴۶) مجموعه مرجع را تعریف کند.

۴۷) مجموعه توان را تعریف کند.

۴۸) تفاضل و متمم و اشتراک و اجتماع را تشریح کند.

۴۹) مجموعه‌های جدااز هم را تعریف و خاصیت‌های مهم آنها را بیان کند.

۵۰) خواص اجتماع و اشتراک را بیان کند.

۵۱) جبر مجموعه‌ها را ارائه نماید.

۵۲) تفاضل متقارن و خواص اساسی مجموعه‌ها را بیان کند.

۵۳) تعمیم اشتراک و اجتماع را شرح دهد و بخش اجتماع و اشتراک را روی آنها توضیح دهد.

۵۴) ارتباط اشیاء و اپراتورهای حساب گزاره‌ها و تئوری مجموعه‌ها را تشریح کند.

فهرست مطالب

فصل اول

منطق و مجموعه‌ها

۱-۱ آشنایی با منطق

منطق، علم قوانین نتیجه‌گیری یا بررسی اصول و روش‌هایی است که برای جدا کردن استدلالهای درست از استدلال‌های نادرست به کار می‌روند.

اولین کسی که منطق را به صورت مدون و علمی درآورد ارسطو، حکیم یونانی قرن چهارم قبل از میلاد است. طی بیست و پنج قرن علم منطق مورد تحقیق تعداد زیادی از دانشمندان قرارگرفته ملحقاتی بر منطق ارسطو آورده‌اند. در قرن نوزدهم به وسیله لایب نیتز[1] علامت‌هایی برای تعدادی از مفاهیم منطقی وضع شد و به همین دلیل او را اولین واضح منطق جدید می‌نامند. پس از او عده زیادی از ریاضی‌دان‌ها و فلاسفه از قبیل دمرگان[2]، بول[3]، پیرس[4]، شرودر[5]، فرگه[6] و پئانو[7] آثار بزرگی از تحقیقات خود را به جا گذاشتند. از این میان به عقیدهٔ بسیاری فرگه و پئانو پدران منطق جدید هستند. کسی که بدون شک اسمش در هر کتاب منطق جدید جا دارد برتواندراسل[8]، فیلسوف عالی مقام انگلیسی است که خدمات شایان توجهی در تنظیم اصول و مبانی منطق و ریاضیات دارد.

1) Leibniz 2) De Morgan 3) Boole 4) Peirce 5) Schroder 6) Frege 7) Peano
8) Russell Bertrand

به عنوان منطق‌دان‌های روزگار اخیر باید از هیلبرت[9] و گودل[10] نام برد. قضیه ناتمامیت گودل از مهمترین قضایای منطق ریاضی محسوب می‌شود. این قضیه با ردکردن برنامه هیلبرت مبنی بر یافتن اصول موضوعه‌ای برای کل ریاضیات به عنوان یک علم وحدت یافته به همراه اثباتی از سازگاری آنها مسیر تحقیقات منطق را تغییر داده است.

نقطهٔ آغاز در منطق «گزاره» است. از انواع جمله‌ها (خبری، امری، سؤالی، دعائی، آرزویی و نظایر آنها) فقط جملهٔ خبری در منطق استفاده می‌شود و علت این امتیاز آن است که از بین انواع جمله‌های ذکر شده، فقط جمله‌های خبری هستند که دو ارزش بیشتر ندارند یا قطعاً راست هستند یا قطعاً دروغ می‌باشند، این نوع جمله‌ها را از این به بعد گزاره می‌نامیم. مثلاً هر یک از ترکیب‌های زیر گزاره است:

۱) در ونوس، پنیر وجود دارد،

۲) یازده عددی زوج است،

۳) ماست سیاه است،

۴) ارشمیدس ظهر روز قبل از مرگش سرفه کرد،

۵) اگر هر گردی گردو است و توپ گرد است، توپ گردو است.

ترکیب‌هایی از قبیل «بیا»، «نرفته‌ای؟»، «الهی خوشبخت شوی»، «ای کاش جوان بودم» و «وه چه هوای خوبی» گزاره نیستند.

ارزش درستی یا دروغ بودن یک گزاره گاهی مشخص بوده و گاهی معلوم نیست (مانند گزاره چهارم). گاهی هم مستلزم کمی دقت می‌باشد.

۱-۱-۱ رابط‌های گزاره‌ای. گزاره‌های چهار مورد اول بالا همگی گزاره‌های ساده هستند. ترکیب دو یا چند گزاره ساده را یک گزارهٔ مرکب می‌نامیم (مانند گزارهٔ پنجم بالا).

برای نمایش گزاره‌های ساده از حروفی مانند p و q و r و . . .استفاده می‌شود. برای ایجاد ارتباط بین گزاره‌های سادهٔ p و q و r و . . .و تشکیل گزاره‌های مرکب از رابط‌های گزاره‌ای استفاده می‌کنیم. مهمترین رابط‌های گزاره‌ای عبارتند از:

9) Hilbert 10) Godel

الف) «نفی » که با $\sim$ نمایش داده می‌شود،

ب) «و» یا عطف که با $\wedge$ نشان داده می‌شود،

ج) «یا» یا فصل که با $\vee$ نمایش داده می‌شود،

د) «اگر . . .آنگاه . . .» که با $\Longrightarrow$ نشان داده می‌شود،

ه) « . . .اگر و تنها اگر . . .» که با $\Longleftrightarrow$ نمایش داده می‌شود.

تذکر. برای هر گزاره تنها دو ارزش قائل شدیم راست و دروغ، این منطق را منطق دو ارزشی یا کلاسیک می‌نامیم.

نفی. اگر p یک گزاره باشد آنگاه گزارهٔ «$\sim p$» که آن را نفی p یا نقیض p می‌نامیم دروغ است اگر p راست باشد و راست است اگر p دروغ باشد. مثلاً اگر p گزاره «برف سفید است» باشد $\sim p$ گزارهٔ «برف سفید نیست» یا «چنین نیست که برف سفید است» می‌باشد. برای نفی می‌توان جدول سادهٔ زیر را تشکیل داد که آن را جدول ارزش یا جدول درستی می‌نامیم.

p	$\sim p$
ن	د
د	ن

در این جدول «د» و «ن» به ترتیب به جای «راست» و «دروغ» درج شده‌اند. ستون اول دو حالت ممکن برای ارزش‌گذاری p یعنی د یا ن نوشته شده است. بدیهی است برای نفی کلاً دو حالت بیشتر نداریم که طی دو ردید جدول مشخص گردیده‌اند.

ترکیب عطفی. اگر رابط گزاره‌ای $\wedge$ را بین دو گزارهٔ p و q قرار داده گزارهٔ مرکب $p \wedge q$ را تشکیل دهیم، ترکیب عطفی فقط وقتی راست است که هر دو گزارهٔ p و q راست باشند و در بقیه حالات دروغ یا نادرست می‌باشد. پس از ترکیب‌های زیر که همه به صورت $p \wedge q$ هستند اولی راست و بقیه دروغ می‌باشند:

ـ ماست سفید است و ۲ + ۳ برابر ۵ است.

ـ ماست سفید است و ۲ + ۳ برابر ۴ است.

ـ ماست سیاه است و ۲ + ۳ برابر ۵ است.

ـ ماست سیاه است و ۲ + ۳ برابر ۴ است.

از الفاظی که از نظر منطقی مترادف عطف است لفظ «امّا = ولی» است. مثلاً گزارهٔ «۷ فرد است ولی اول نیست» به معنی «۷ فرد است و ۷ اول نیست» می‌باشد که البته گزاره‌ای نادرست است.

تذکر. در یک گزارهٔ مرکب مانند $p \wedge q$ هر یک از گزاره‌های p و q را مؤلفه می‌گویند. در گزاره‌ای مرکب با دو مؤلفه مانند $p \wedge q$ حداکثر (۲ × ۲) یعنی ۴ حالت وجود دارد که هر حالت در سطری از جدول ارزش درج می‌شود. پس جدول ارزش $p \wedge q$ به صورت زیر است:

p	q	$p \wedge q$
ن	ن	ن
ن	د	ن
د	ن	ن
د	د	د

ترکیب فصلی. دو گزاره p و q در دو مورد به وسیله «یا» ترکیب می‌شود. یکی وقتی است که یکی از دو گزاره و تنها یکی از آنها راست می‌باشد مانند « این عدد زوج است یا فرد» و یا به صورت منطقی «این عدد زوج است یا این عدد فرد است». در اینجا جمع درست بودن دو گزاره ممنوع است و گوییم «یا» با معنی منع جمع استعمال شده است. بعضی از مؤلفین نماد $\oplus$ را برای یای منع جمع به کار می‌برند، پس جدول ارزش این رابط گزاره‌ای به صورت زیر است:

p	q	$p \oplus q$
ن	ن	ن
ن	د	د
د	ن	د
د	د	ن

امّا گاهی «یا» در مواردی به کار می‌رود که منظور این باشد که لااقل یکی از دو گزاره که به وسیله این رابط ترکیب می‌شود راست است ولی منعی برای درست بودن هر دو نیست مانند: « این عدد فرد است یا اول

است» یای منع جمع در منطق استعمالی ندارد و می‌توان نشان داد قادریم آن را به وسیله بقیه رابط‌های گزاره‌ای بیان کنیم.

گزاره حاصل از ترکیب دو گزاره p و q به وسیله یای منطقی **ترکیب فصلی** آن دو گزاره نامیده می‌شود. ترکیب فصلی وقتی درست است که حداقل یک گزاره سازهای آن درست باشد در غیر این صورت نادرست است. لذا از ترکیبات فصلی زیر همه، به جز چهارمی، درست‌اند:

ـ ماست سفید است یا هفت فرد است.

ـ ماست سفید است یا خروس سه پا دارد.

ـ ماست سیاه است یا هفت فرد است.

ـ ماست سیاه است یا هفت زوج است.

جدول درستی ترکیب فصلی گزاره‌های p و q به صورت زیر است:

p	q	$p \vee q$
ن	ن	ن
ن	د	د
د	ن	د
د	د	د

تذکر. الفاظی مانند «و» و «یا» فقط وقتی در ترکیب گزاره‌ها به کار رود از لغت‌های منطق می‌باشند. پس در ترکیب‌هایی مانند «خربزه و هندوانه» و «خربزه یا هندوانه» الفاظ «و» و «یا» لغات منطقی نیستند.

تذکر. یای مانع جمع در منطق با تکرار لفظ «یا » و نیز با لفظ «الاّ» مشخص می‌کنند مثلاً گزاره‌های

«یا ۷ فرد است یا ۷ زوج است»

«۷ فرد است والاّ زوج است»

به یک معنی بوده ومشخص کنندهٔ یای مانع جمع هستند.

۱-۱-۲ مثال. گزارهٔ «ماست سفید است یا ماست سیاه است» را در نظر گرفته فرض کنید لفظ «یا» یکبار یای منطقی است و بار دیگر یای مانع جمع می‌باشد و در هر حالت ارزش آن را مشخص کنید.

حل: اگر «یا» همان یای منطقی باشد گزاره درست است ولی اگر یا، یای مانع جمع باشد گزاره‌ای نادرست می‌باشد.

ترکیب شرطی. اگر p و q دو گزاره باشند گزارهٔ «اگر p آنگاه q » را ترکیب شرطی گزاره‌های p و q می‌نامیم و آن را به صورت $p \Longrightarrow q$ نشان می‌دهیم.

مثلاً گزارهٔ مرکب $p \Longrightarrow q$ را «اگر هوا آفتابی باشد آنگاه به مسافرت خواهیم رفت» در نظر می‌گیریم. از نظر ما این قرار (گزاره) چه وقت نقض می‌شود (دروغ)؟ بدیهی است که این قرار فقط در حالتی که هوا، آفتابی باشد (p راست باشد) و ما به مسافرت نرویم نقض شده است. در نتیجه ستون نهایی جدول ارزش $p \Longrightarrow q$ به جز حالتی که p راست و q دروغ باشد در هر حالتی باید ارزش درست داشته باشد. بنابه بحث بالا عرفاً گزارهٔ شرطی $p \Longrightarrow q$ با شیوه‌ای که گزارهٔ «اگر p آنگاه q» در محاورهٔ عادی به کار می‌رود تفاوت دارد.

در زبان عادی (در مقابل زبان منطق که آن را زبان صوری می‌نامیم) جمله‌ای به صورت «اگر p آنگاه q» به این معنی است که هر وقت p راست باشد q راست است بنابراین حالتهایی که p دروغ هستند مطرح نمی‌شوند. به عنوان مثال گزارهٔ «اگر ماست سیاه بود آنگاه پنج عددی زوج بود» بی معنی تلقی می‌شود زیرا هر دو مؤلفه دروغ هستند. پس در گفتگوی عادی ارزش راستی چنین گزاره‌ای بررسی نمی‌شود. امّا برای ایجاد یک زبان صوری، منطق‌دان‌ها خواستار تعیین ارزش درستی گزارهٔ $p \Longrightarrow q$ درهر چهار حالت منطقی هستند هرچند که دو حالت از چهار حالت بالا در زبان عادی بی معنی به نظر می‌رسد.

توجه کنید که اگر توافق بالا نبود بعضی از برهان‌ها (مثل ϕ زیر مجموعه هر مجموعه است) یا خیل مشکل می‌شوند یا زشت یا ناهنجار.

به این ترتیب جدول درستی گزارهٔ شرطی $p \Longrightarrow q$ به صورت زیر است:

p	q	$p \Longrightarrow q$
ن	ن	د
ن	د	د
د	ن	ن
د	د	د

در ترکیب شرطی $p \Longrightarrow q$ گزارهٔ p را مقدم و گزارهٔ q را تالی می‌نامیم.

تذکر. گزارهٔ شرطی $q \Longrightarrow p$ را عکس گزارهٔ شرطی $p \Longrightarrow q$ می‌نامیم. ارزش گزاره‌های عطفی $p \wedge q$ و فصلی $p \vee q$ از ترکیب مؤلفه‌ها مستقل است. ولی ممکن است $p \Longrightarrow q$ راست ولی $q \Longrightarrow p$ دروغ باشد و یا بالعکس.

تذکر. بیان ترکیب شرطی « اگر p آنگاه q» در ریاضیات و در زبان محاوره‌ای به صورتهای مختلف زیر امکان‌پذیر است:

۱) q شرط لازم برای p است،

۲) p شرط کافی برای q است،

۳) شرط کافی برای p آن است که q،

۴) q اگر p،

۵) q به شرطی که p،

۶) p و فقط وقتی که q،

۷) اگر p، q،

۸) هرگاه p آنگاه q،

۹) شرط لازم برای p آن است که q،

۱۰) p مستلزم q است.

برای ارائه استدلال درست باید با اصول منطق آشنا باشیم. عدم دقت در هر یک از موارد ذکر شده ممکن است ما را به نتایج نادرستی برساند.

ترکیب دوشرطی. گزارهٔ اگر p آنگاه q و اگر q آنگاه p که همان $(p \Longrightarrow q) \wedge (q \Longrightarrow p)$ است **ترکیب دوشرطی** p و q نامیده شده و با $p \longleftrightarrow q$ نمایش داده می‌شود.

گزارهٔ $p \longleftrightarrow q$ وقتی راست است که هر دو مؤلفه‌اش راست یا هر دو مؤلفه‌اش دروغ باشند، در حالات دیگر گزاره $p \longleftrightarrow q$ دروغ است. (برای توجیه این به مثال مراجعه شود).

۱-۱-۳ مثال. اگر p گزارهٔ «۱۱ عددی اول است» و q گزارهٔ «۷ عددی زوج است» باشند ارزش گزاره‌های $p \Longrightarrow q$ و $q \Longrightarrow p$ و $\sim p \Longrightarrow \sim q$ و $\sim q \Longrightarrow \sim p$ و $\Longleftrightarrow$ را بنویسید.

حل: p راست و q دروغ است بنابراین $p \Longrightarrow q$ دروغ و $q \Longrightarrow p$ راست و $\sim p \Longrightarrow \sim q$ راست و $\sim q \Longrightarrow \sim p$ دروغ و $p \Longleftrightarrow q$ نیز دروغ است.

تذکر. شبیه ترکیب شرطی،برای ترکیب دوشرطی نیز بیان‌های مختلفی وجود دارد که بعضی از آنها عبارتند از:

۱) شرط لازم و کافی برای p آن است که q،

۲) شرط لازم و کافی برای q آن است که p،

۳) p اگر وتنها اگر q،

۴) اگر p آنگاه q و بالعکس،

۵) p فقط و فقط وقتی که q.

p	q	$p \Longleftrightarrow q$
ن	ن	د
ن	د	ن
د	ن	ن
د	د	د

تذکر. تعاریف در ریاضیات همیشه به صورت ترکیبی دوشرطی هستند حتی اگر در بیان ظاهری اینگونه نداشته باشند. مثلاً تعریف «دو خط در صفحه موازیند هرگاه نقطهٔ مشترکی نداشته باشند» در واقع به این صورت است که «دو خط در صفحه موازیند اگر و تنها اگر نقطه مشترکی نداشته باشند».

۱-۱-۴ مثال. گزارهٔ «$a^2 = b^2$ چگونه شرطی برای گزاره $|a| = |b|$ است؟ $(a, b \in \mathbb{R})$

حل: چون برای هر دو عدد حقیقی a و b داریم $|a| = |b| \Longleftrightarrow a^2 = b^2$ پس لازم و کافی است.

۱-۲ ترکیب‌های منطقی وفرمول‌های حساب گزاره‌ها

هر عبارت یا ترکیب منطقی به وسیله رابطهای گزاره‌های $\sim$، $\wedge$، $\vee$، $\Longrightarrow$ و $\Longleftrightarrow$ و گزاره‌های p و q و ...ساخته می‌شود و یک فرمول حساب گزاره‌ها نامیده می‌شود.

۱-۲-۱ جدول ارزش (درستی). تعداد سطرهای جدول درستی یا ارزش‌دهی‌های یک گزاره به تعداد گزاره‌های تشکیل دهندهٔ آن بستگی دارد مثلاً اگر تنها یک گزاره p داریم فقط دو ارزش (دو سطر در جدول درستی) وجود دارد. ولی گزاره‌ای مانند $(p \Longrightarrow q) \wedge p$ دارای چهار ارزش دهی (د و د) و (ن و د) و (د و ن) و (ن و ن) است. به طور کلی درگزاره‌ای شامل n حرف گزاره‌ای دقیقاً ۲^n ارزش‌دهی (سطر جدوی درستی) امکان‌پذیر است.

برای تعیین تمام حالات ممکن ارزش‌دهی یک فرمول، اگر ن را صفر و د را ۱ فرض کنیم کافیست سوال‌های جدول را از صفر شروع به شماره‌گذاری کنیم سپس اعداد شماره سطر را به مبنای دو ببریم و در پایان صفر را به ن و ۱ را به د تبدیل کنیم.

۱-۲-۲ مثال. گزاره‌ای مرکب شامل چهار گزارهٔ ساده است اگر سطرهای جدول ارزش آن را از صفر شروع کنیم به شماره‌گذاری به سؤالات زیر پاسخ دهید:

الف) چند سطر خواهیم داشت؟

ب) شماره آخرین سطر جدول چیست؟

ج) سطر با شماره سیزده چه ارزش‌دهی راخواهد داشت؟

حل: چون $n = ۴$ پس $۲^n = ۲^۴ = ۱۶$ سطر خواهیم داشت. شماره آخرین سطر جدول ۱۵ خواهد بود. چون ۴ ستون داریم

$$۱۵ = ۲^۳ + ۲^۲ + ۲^۱ = ۸ \times ۱ + ۴ \times ۱ + ۲ \times ۱ + ۱ \times ۱$$

$$۱۳ = ۸ \times ۱ + ۴ \times ۱ + ۲ \times ۰ + ۱ \times ۱ \text{ یا } \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 8 & 4 & 2 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 1 \\ \hline \end{array} \Longrightarrow$$

گزاره مرکب	s	r	q	p	
$\vdots$	۰	۰	۰	۰	
				یا	سطر صفر
$\vdots$	ن	ن	ن	ن	
$\vdots$	...	...	...	...	
$\vdots$	...	...	...	...	
$\vdots$	...	...	...	...	
$\vdots$	۱	۰	۱	۱	
				یا	سطر شماره سیزده
$\vdots$	د	ن	د	د	
$\vdots$	...	...	...	...	
$\vdots$	...	...	...	...	
$\vdots$	...	...	...	...	
$\vdots$	۱	۱	۱	۱	
				یا	سطر شماره پانزده
$\vdots$	د	د	د	د	

۱-۲-۳ مثال. در مثال قبل سطر سیزدهم چه ارزشدهی خواهد داشت؟

حل: شماره سطر سیزدهم عدد ۱۲ است پس

$$۱۲ = ۲^۳ \times ۱ + ۲^۲ \times ۱ + ۲^۱ \times ۰ + ۲^۰ \times ۰$$

ن ن د د یا ۰ ۰ ۱ ۱ $\Longrightarrow$ ارزشدهی سطر سیزدهم

۱-۲-۴ مثال. جدول ارزش گزاره‌های مرکب $(p \Longrightarrow q) \wedge (q \Longrightarrow p)$ و $p \Longleftrightarrow q$ را ترسیم و ستون آخر آنها را با هم مقایسه کنید.

حل:

	p	q	$p \Longrightarrow q$	$q \Longrightarrow p$	$(p \Longrightarrow q) \wedge (q \Longrightarrow q)$
۰	ن	ن	د	د	د
۱	ن	د	د	ن	ن
۲	د	ن	ن	د	ن
۳	د	د	د	د	د

p	q	$p \Longleftrightarrow q$
ن	ن	د
ن	د	ن
د	ن	ن
د	د	د

ستون آخر آنها یکسان هستند.

۱-۲-۵ مثال. جدول ارزش گزاره مرکب $\sim p \vee q \Longrightarrow r$ را تنظیم کنید.

حل: سه گزاره ساده پس هشت سطر داریم:

	p	q	r	$\sim p$	$\sim p \vee qp$	$\sim p \vee q \Longrightarrow r$
۰	ن	ن	ن	د	د	ن
۱	ن	ن	د	د	د	د
۲	ن	د	ن	د	د	ن
۳	ن	د	د	د	د	د
۴	د	ن	ن	ن	ن	د
۵	د	ن	د	ن	ن	د
۶	د	د	ن	ن	د	ن
۷	د	د	د	ن	د	د

۱-۳ تساوی دو گزاره

گزاره‌های p و q را مساوی نامیده و می‌نویسیم $p = q$ هرگاه p و q یک خبر رابه ما بدهند مثلاً گزاره‌های «۲ از پنج کوچکتر است» و «پنج از ۲ بزرگتر است» مساویند.

۱-۴ هم ارزی دو گزاره

دو گزاره q و p را هم ارز می‌نامیم هرگاه ستون آخر جدول ارزش آنها یکی باشد و می‌نویسیم $p \cong q$.
توجه کنید ممکن است p و q یک خبر را به ما ندهند. با این توضیح اگر $p = q$ باشد بدیهی است که $p \cong q$ می‌شود امّا $p \cong q$ الزاماً $p = q$ را نتیجه نمی‌دهد.
مثلاً گزاره «ماست سیاه است» هم ارز « ۶ عددی اول است» می‌باشد زیرا هر دو نادرست هستند ولی این دو گزاره یک خبر را به ما نمی‌دهند.

تذکر. در بعضی از منابع دو گزارهٔ u و v را هم‌ارز می‌نامند هرگاه $u \Longleftrightarrow v$ گزاره‌ای درست باشد و در این صورت هر گزارهٔ دوشرطی درست را یک معادلهٔ منطقی می‌نامند. از این تعریف و یا تعریف بالا بلافاصله خواص زیر نتیجه می‌شود:

۱) هر گزاره‌ای با خودش هم‌ارز است.

۲) اگر p با q هم‌ارز باشد q نیز با p هم‌ارز است.

۳) اگر p با q هم‌ارز و q خود با r هم‌ارز باشد p با r هم‌ارز است.

گزاره‌های همیشه درست و همیشه نادرست. گزاره‌ای را که همواره درست (نادرست) باشد (مستقل از ارزش مؤلفه‌هایش) گزاره‌ای همیشه درست (همیشه نادرست) می‌نامیم.
الگوی بعضی از گزاره‌های همیشه درست به صورت زیر است:

$$۱) p \vee \sim p \qquad ۴) p \wedge q \Longrightarrow q \wedge p \qquad ۷) p \Longrightarrow p \vee q$$

$$۲) p \Longrightarrow p \qquad ۵) p \Longrightarrow p \wedge p \qquad ۸) (p \vee q) \wedge \sim p \Longrightarrow q$$

$$۳) p \Longleftrightarrow p \qquad ۶) p \wedge q \Longrightarrow p$$

با تنظیم جدول درستی می‌توان گزاره‌های همیشه درست (و همیشه نادرست) را مشخص کرد. در ستون آخر جدول درستی گزاره همیشه درست(همیشه نادرست) منحصراً د (ن) خواهیم داشت.

در منطق یا ریاضیات هر «قضیه» گزاره‌های همیشه درست است و «برهان» قضیه اثبات درستی آن می‌باشد.

قضیه زیر از مهم‌ترین قضایای منطق است، آن را جبرگزاره‌ها نیز می‌نامیم. هدف اصلی از بیان آن مقرون به صرفه نبودن مقایسه ارزش گزاره به وسیله روش جدول است. استفاده از این قضیه و به خاطر سپردن دستورهای ذکر شده معمولاً محاسبات را بسیار ساده می‌کند.

۱-۴-۱ قضیه (جبرگزاره‌ها).

قوانین جابه‌جایی $۱)p \wedge q \cong q \wedge p, p \vee q \cong q \vee p$

قوانین شرکت‌پذیری $۲)(p \wedge q) \wedge r \cong p(q \wedge r), (p \vee q) \vee r \cong p \vee (q \vee r)$

قوانین پخشی $۳)p \wedge (q \vee r) \cong (p \wedge q) \vee (p \wedge r), p \vee (q \wedge r) \cong (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

قانون نقیض نقیض $۴) \sim (\sim p) \cong p$

$۵)(p \Longrightarrow q) \cong (\sim p \vee q)$

$۶)(p \Longleftrightarrow q) \cong (p \Longrightarrow q) \wedge (q \Longrightarrow p)$

$۷)(p \Longrightarrow q) \cong (\sim q \Longrightarrow \sim p)$

$۸) \sim (p \Longleftrightarrow q) \cong (\sim p \Longleftrightarrow q) \cong (p \Longleftrightarrow \sim q)$

$۹)(p \Longleftrightarrow q) \cong (\sim q \Longleftrightarrow \sim p)$

قوانین دمورگان $۱۰) \sim (p \wedge q) \cong (\sim p \vee \sim q), \sim (p \vee q) \cong (\sim p \wedge \sim q)$

قوانین شبه جذب $۱۱)p \wedge (\sim p \vee q) \cong p \wedge q, p \vee (\sim p \wedge q) \cong p \vee q$

قوانین جذب $۱۲)p \wedge (p \vee q) \cong p, p \vee (p \wedge q) \cong p$

تصدی $۱۳)(p \Longrightarrow q) \wedge (q \Longrightarrow r) \cong (p \Longrightarrow r)$

قوانین راسل $۱۴)((p \Longrightarrow q) \wedge (r \Longrightarrow s)) \Longrightarrow ((p \wedge r) \Longrightarrow (q \wedge s)) \cong T$

قوانین راسل $۱۵)((p \Longrightarrow q) \vee (r \Longrightarrow s)) \Longrightarrow ((p \vee r) \Longrightarrow (q \vee s)) \cong T$

قیاس استثنایی یا قانون انتزاع $۱۶)((p \Longrightarrow q) \wedge p \Longrightarrow q) \cong T$

نقیض انتزاع $۱۷)(((p \Longrightarrow q) \wedge \sim q) \Longrightarrow \sim p) \cong T$

برهان خلف $۱۸)(p \Longrightarrow q) \cong (p \wedge \sim q \Longrightarrow q \wedge \sim p)$

منظور از T گزارهٔ همیشه درست است.

توجه کنید که چون ارزش درستی یک گزارهٔ همیشه درست مستقل از ارزش مؤلفه‌هایش است می‌توان به جای هر مؤلفه دلخواه در سراسر آن گزاره مرکب، فرمول دلخواهی جایگزین کنیم. به این ترتیب می‌توان از یک گزارهٔ همیشه درست یاهر یک از قوانین ذکر شده در بالا، گزاره‌های همیشه درست بیشماری بدست آورد.

۱-۴-۲ مثال. به کمک جبر گزاره‌ها ثابت کنید اگر p و q و r سه گزاره باشند به طوری که $r \vee p \cong r \vee q$ و $r \wedge p \cong r \wedge q$ آنگاه $p \cong q$.

حل:

$$p \cong p \vee (p \wedge r) \cong p \vee (q \wedge r) \cong (p \vee q) \wedge (p \vee r) \cong (p \vee q) \wedge (q \vee r) \cong q \vee (p \wedge r)$$
$$\cong q \vee (q \wedge r) \cong q$$

۱-۴-۳ مثال. ثابت کنید $(p \Longrightarrow q) \cong (\sim q \Longrightarrow \sim p)$

حل: **روش اول:** نشان می‌دهیم ستون‌های آخر جدول درستی گزاره‌های $p \Longrightarrow q$ و $\sim q \longrightarrow \sim p$ یکسان هستند.

روش دوم:

$$(p \Longrightarrow q) \cong \sim p \vee q \cong \sim (p \wedge \sim q) \cong \sim (\sim q \wedge p)$$
$$\cong \sim (\sim q \wedge \sim (\sim p)) \cong (\sim q \Longrightarrow \sim p)$$

۱-۴-۴ مثال. نشان دهید $((p \wedge q) \Longrightarrow r) \cong (p \Longrightarrow (q \Longrightarrow r))$

حل:

$$(p \Longrightarrow (q \Longrightarrow r)) \cong (p \Longrightarrow \sim (q \wedge \sim r)) \cong \sim (p \wedge (q \wedge \sim r)) \cong \sim ((p \wedge q) \wedge \sim r)$$
$$\cong ((p \wedge q) \Longrightarrow r)$$

۱-۴-۵ مثال. فرق $\cong$ و $\Longleftrightarrow$ را بیان کنید.

حل: $\cong$ یعنی دو گزاره معادل یا هم‌ارز منطقی‌اند به عبارت دیگر به ازای هر گونه ارزشی که گزاره‌های مؤلفه‌های آنها داشته باشند، ارزش آن دو گزاره یکسان شود. در حالی که در $\Longleftrightarrow$ ممکن است ارزش مؤلفه‌های دو طرف رابط متفاوت باشد مثل $\sim p \Longleftrightarrow p$ که گزاره‌ای همیشه نادرست است و ارزش p و $\sim p$ متضاد همدیگر است. وقتی دوگزاره به وسیله $\cong$ مرتبط شوند هم‌ارزی آنها گزاره‌ای همیشه درست می‌باشد.

تذکر. به کارگیری زیاد پرانتزها درگزاره‌ها موجب بزرگ شدن بیهوده نوشتار شده درک گزاره را دشوار می‌کند. برای ساده‌کردن گزاره‌نویسی قراداد می‌کنیم که اگر پرانتزی دامنه عملکرد نماد منطقی را مشخص نکرده باشد دامنه عملکرد هر رابط منطقی کوچکترین گزاره‌ای باشد که درکنارش قرارگرفته است. به کاربردن این قرارداد طبق اولویت‌های زیر انجام می‌گیرد:

ابتدا دامنهٔ عملکرد «$\sim$» سپس «$\wedge$»، «$\vee$» و سپس «$\Longrightarrow$»، «$\Longleftrightarrow$» تعیین می‌شوند. برای نمادهایی که اولویتی نسبت به هم ندارند مانند «$\wedge$» و « $\vee$» و همچنین «$\Longrightarrow$» و «$\Longleftrightarrow$» آن رابط گزاره‌ای که در سمت چپ دیگری قرار دارد اولویت خواهد داشت.

۱-۴-۶ مثال. گزاره‌های داده شده را پرانتزگذاری کنید.

۱) $\sim p \Longrightarrow q \wedge r \Longrightarrow p$

$((\sim p) \Longrightarrow (q \wedge r)) \Longrightarrow p$

۲) $(p \Longrightarrow (q \vee r)) \wedge \sim q \Longrightarrow p \wedge r$

$$((p \Longrightarrow (q \vee r)) \wedge (\sim q)) \Longrightarrow (p \wedge r)$$

۱-۵ سورهای منطقی

سور به معنی چندی و مقدار است و کلی یا جزئی بودن گزاره را بیان می‌کند.
در هر بحثی دسته‌ای متناهی یا نامتناهی از اشیاء که خواصشان مورد نظر هستند پیش می‌آید. دستهٔ مذکور را عالم سخن می‌گویند. مثلاً در گزارهٔ «تمام حیوانات، مهره‌دار هستند». عالم، دستهٔ تمام انسان‌هاست.

۱-۵-۱ سور عمومی. به جای عبارت‌هایی نظیر «هرچه باشد»، «به ازای تمام مقادیر» سور عمومی به کارمی‌رود و بانماد $\forall$ نشان داده می‌شود. اگر خاصیتی را که در مورد x برقرار است با $p(x)$ نشان دهیم، $(\forall x)(p(x))$ یعنی برای تمام xهای عالم سخن، خاصیت p در مورد x برقرار است.

۱-۵-۲ سور وجودی. اگر مانند سابق خاصیتی راکه در مورد x برقرار است با $p(x)$ نشان دهیم $(\exists x)(p(x))$ یعنی xای وجود دارد از عالم سخن که خاصیت p در مورد آن برقرار است. در واقع سور وجودی که با نماد $\exists$ نشان داده می‌شود به جای عبارتهایی نظیر «وجود دارد»، «لااقل برای یک مقدار»، «برای بعضی مقادیر» به کار می‌ورد.

۱-۵-۳ سور صفر. به جای عبارت‌هایی نظیر «وجود ندارد»، « برای هیچ مقدار» سور صفر به کار می‌رود و با نماد $\nexists$ نشان داده می‌شود. $(\nexists x)(p(x))$ یعنی هیچ xای از عالم سخن وجود ندارد که خاصیت p در مورد آن برقرار باشد.

۱-۵-۴ سور وحدت یا یکانه یا انحصاری. به جای عبارت‌هایی نظیر «برای دقیقاً یک مقدار »، « فقط یک مقدار» سور وحدت به کار رفته با نماد $\exists!$ یا $\exists^*$ نشان داده می‌شود. $(\exists! x)(p(x))$ یعنی فقط یک x از عالم سخن وجود دارد که خاصیت p در مورد آن برقرار است.

۱-۵-۵ دامنهٔ عمل سورها. خاصیت p در بحث‌های انجام شده دامنه عمل سور نامیده می‌شود. با به کارگیری مکرر سورها و نمادهای منطقی می‌توان از فرمول‌های ساده اولیه، فرمول‌های پیچیده‌تری ساخت. برای مشخص بودن دامنه عملکرد سورها و نمادهای منطقی، استفاده از پرانتز لازم است مگر آنکه برای اختصار در تحریر طبق قراردادهایی دامنه عملکرد مشخص شده باشد. طبق قرارداد برای تعیین دامنه عمل سورها ونمادهای منطقی، ابتدا دامنه عمل «$\sim$» وسپس دامنه عمل سورهای «$\forall$» و «$\exists$» تعیین می‌شوند که کوچکترین گزاره نمای سمت راست آنها است. سلسله مراتب بقیه رابط‌های گزاره‌ای مانند قبل است. توجه کنید، سورهای «$\forall$» و «$\exists$» از پیش اولویتی برهم ندارند و هرکدام که سمت چپ دیگری واقع شده برای تعیین دامنهٔ عملکرد اولویت دارد.

۱-۵-۶ مثال.

۱) در فرمول $(\forall x)(f(x) \Longrightarrow g(x))$ دامنهٔ سور عمومی $f(x) \Longrightarrow g(x)$ است.

۲) در فرمول $(\forall x)(f(x) \Longrightarrow g(x))$ دامنهٔ سور عمومی، $f(x)$ است. مقدم این فرمول $(\forall x)(f(x))$ و تالی آن $g(x)$ است.

۳) در فرمول $(\exists x) \sim f(x)$، دامنه سور وجودی $\sim f(x)$ است.

۴) در فرمول $(\forall x)(f(x,y) \vee (\exists y) \sim g(x,y))$ دامنهٔ سور وجودی، $\sim g(x,y)$ هستند. دامنه سور عمومی تمام فرمول واقع در داخل پرانتز بزرگ است.اگر پرانتز بزرگ برداشته شود، دامنهٔ سور وجودی $\sim g(x,y)$ و دامنهٔ سور عمومی $f(x,y)$ می‌باشد.

توجه کنید که حالت اول یکی از دو سور و دامنه‌اش تماماً در دامنهٔ سور دیگری قرار می‌گیرد ولی در حالت دوم چنین نیست.

۵) در فرمول $((\exists \delta > 0)(0 < |x-a| < \delta \Longrightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon))$ و $(\forall \varepsilon > 0)$ دامنه سور عمومی تمام فرمول واقع در پرانتز بزرگ و دامنه سور وجودی همهٔ پرانتز کوچکتر است. سور وجودی و دامنه‌اش تماماً در دامنه سور عمومی قرار می‌گیرد.

۱-۶ نقیض سورها

اگر p خاصیتی برای x باشد آنگاه

$$۱)\ \sim[(\forall x)(p(x))] \cong (\exists x)(\sim p(x))$$

$$۲)\ \sim[(\exists x)(p(x))] \cong (\forall x)(\sim p(x)) \cong (\nexists x)(p(x))$$

$$۳)\ \sim[(\nexists x)(p(x))] \cong (\exists x)(\sim p(x))$$

$$۴)\ \sim[(\exists! x)(p(x))] \cong (\nexists x)(\sim p(x))$$

نتیجه: برای اینکه نشان دهیم $p(x)$ به ازای هر x درست نیست کافی است xای بیابیم که به ازای آن $p(x)$ درست باشد.

برای آنکه ثابت کنیم هیچ xای نیست که به ازای آن $p(x)$ درست باشد نشان می‌دهیم به ازای هر x خاصیت $p(x)$ نادرست است.

۱-۶-۱ مثال. نقیض گزاره‌های سوری زیر را بنویسید:

$$۱)\ (\forall \varepsilon > ۰), ((\exists \delta > ۰)(۰ < |x-a| < \delta \Longrightarrow |f(x)-\ell| < \varepsilon)$$

اگر $۰ < |x-a| < \delta$ را با $p(x)$ و $|f(x)-\ell| < \varepsilon$ را با $q(x)$ نشان دهیم $p(x) \Longrightarrow q(x)$ هم ارز منطقی $\sim p(x) \vee q(x)$ است پس

$$(\forall \varepsilon > ۰), ((\exists \delta > ۰)(p(x) \Longrightarrow q(x)) \cong (\forall \varepsilon > ۰)((\exists \delta > ۰)(\sim p(x) \vee q(x)))$$

در نتیجه نقیض به صورت زیر است:

$$\sim (\forall \varepsilon > ۰)((\exists \delta > ۰)(۰ < |x-a| < \delta \Longrightarrow |f(x)-\ell| < \varepsilon) \cong$$

$$\cong \sim (\forall \varepsilon > ۰)((\exists \delta > ۰)(\sim p(x) \vee q(x)) cong (\exists \varepsilon > ۰)((\forall \delta > ۰)(p(x) \wedge \sim q(x)))$$

$$\cong (\exists \varepsilon > ۰)(\forall \delta > ۰)(۰ < |x-a| < \delta \wedge |f(x)-\ell| \geq \varepsilon)$$

$$۲)(\forall\varepsilon > ۰)((\exists N \in \mathbb{N})((\forall n > N)(|a_n - \ell| < \varepsilon)))$$

$$\sim [(\forall\varepsilon > ۰)((\exists N \in \mathbb{N})((\forall n)(|a_n - \ell| < \varepsilon)))] \cong$$

$$(\exists\varepsilon > ۰) \sim ((\exists N \in \mathbb{N})((\forall n > N)(|a_n - \ell| < \varepsilon))) \cong$$

$$(\exists\varepsilon > ۰)((\forall N \in \mathbb{N}) \sim ((\forall n > N)(|a_n - \ell| < \varepsilon))) \cong$$

$$(\exists\varepsilon > ۰)((\forall N \in \mathbb{N})((\exists n > N) \sim (|a_n - \ell| < \varepsilon))) \cong$$

$$(\exists\varepsilon > ۰)((\forall N \in \mathbb{N})((\exists n > N)(|a_n - \ell| \geq \varepsilon)))$$

دراین مورد نقیض را مرحله به مرحله تأثیر داده‌ایم تا دانشجو درک بهتری داشته باشد. دقت کنید که فرمول اصلی همان $\lim_{n\longrightarrow\infty} a_n = \ell$ یعنی همگرایی دنباله a_n به ℓ است که نقیضش نوشته شده است.

$$۳)Q \cong (\forall)(p \Longrightarrow \exists yR \vee \exists zp)$$

$$\sim Q \cong \sim (\forall x)(p \Longrightarrow \exists yR \vee \exists zp) \cong (\exists x) \sim (p \Longrightarrow \exists yR \vee \exists zp)$$

$$\cong (\exists x)(p \wedge \sim (\exists yR \vee \exists zp)) \cong (\exists x)(p \wedge (\sim \exists yR \wedge \sim \exists zp))$$

$$\cong (\exists x)(p \wedge (\forall y \sim R \wedge \forall z \sim p))$$

۱-۶-۲ اسمنما. اسمنما، علامت یا نمادی است شامل یک یا چند متغیر به طوری که با تبدیل همهٔ موارد متغیرها در سراسر آن به اسم یا اسم‌های خاص، به یک اسم خاص تبدیل شود.

مثلاً Arcsing و $\sqrt{x^۲ - ۱}$ اسم‌نما هستند که در ازای $y = ۱$ و $x = ۲$ به اسم خاص $\frac{\pi}{۲}$ و $\sqrt{۳}$ تبدیل می‌شوند. هر ارتباط بین دو اسم‌نما، یک گزاره‌نما است. به عبارت دیگر گزاره‌نما جمله‌ای است خبری شامل یک یا چند متغیر که با تبدیل متغیرها به اشیاء خاص به یک گزاره تبدیل می‌شود. متغیرهای موجود در یک گزاره‌نما را متغیرهای آزاد گزاره‌نما می‌نامند. اگر متغیرهای آزاد یک گزاره‌نما مانند P در بین $x_۱, \cdots, x_k$ باشند این مطلب را به صورت $p(x_۱, \cdots, x_k)$ نشان می‌دهیم. این علامت‌گذاری به معنای آن نیست که همهٔ $x_۱, \cdots, x_k$ لزوماً در P آزادند.

اگر $P(x_۱, \cdots, x_k)$ و $Q(x_۱, \cdots, x_k)$ دو گزاره‌نما باشند عبارات

$$\sim P, P \vee Q, P \wedge Q, P \Longrightarrow Q, P \Longleftrightarrow Q$$

هم گزاره‌نما هستند و متغیرهای آزاد آنها در بین $x_1, \cdots, x_k$ می‌باشند زیرا با تبدیل $x_1, \cdots, x_k$ به اشیاء خاص در عبارات بالا، عبارت بدست آمده به صورت عمل نمادهای منطقی بین گزاره‌ها در می‌آید و چنین عبارتی یک گزاره است. مثلاً اگر در مجموعه انسان‌ها $R(x,y)$ عبارت x، y را می‌شناسد و $s(x)$ عبارت x مذکر است باشد موارد زیر گزاره‌نما می‌باشند:

$$1) s(z) \Longrightarrow R(x,y)$$

$$2) \sim R(z,y) \vee (R(x,t) \Longleftrightarrow s(w))$$

متغیرهای آزاد (۱) بین z و y و x و متغیرهای آزاد (۲) بین w و t و z و y و x است.

۱-۶-۳ مثال. جملهٔ زیر را در نظر می‌گیریم:

«$3n + 14$ بر $n + 1$ بخش‌پذیر است»

این جمله نه گزاره است نه گزاره‌نما. مثلاً اگر هواپیما=n باشد این جمله بی‌معنی است.

۱-۶-۴ مثال. جملهٔ زیر را در نظر می‌گیریم:

«اگر n عددی مفروض باشد، $3n + 14$ بر $n + 1$ بخش‌پذیر است»

این جمله، نه گزاره است نه گزاره‌نما. مثلاً اگر $n = i\sqrt{19}$ باشد جمله بی‌معنی است.

مثال. جملهٔ زیر را در نظر می‌گیریم:

«اگر m و n دو عدد حقیقی باشند آنگاه $m^2 > n^2 + 1$»

این جمله گزاره‌نمایی دو متغیره است. در حالت $m = 0$ و $n = 2$ گزاره‌ای نادرست و در حالت $m = 2$ و $n = 0$ گزاره‌ای درست بدست می‌آید. اگر این گزاره‌نما را با $R(m,n)$ نشان دهیم $R(0,2)$ نادرست و ارزش $R(2,0)$ درست است.

۱-۶-۵ مثال. جملهٔ زیر را در نظر می‌گیریم:

«به ازای هر عدد x، $x^2 \geq 0$»

این جمله، نه گزاره و نه گزاره‌نما. عدد x به چه مجموعه‌ای تعلق دارد؟ اگر $x \in \mathbb{R}$ باشد این جمله دارای معنی است. امّا اگر مثلاً $x = ۱ - i$ باشد $x^۲ = -۲i$ با عدد صفر قابل مقایسه نیست و معلوم نیست که $x^۲ \geq ۰$ شود.

۱-۶-۶ کاربرد سورها. سورها، علایمی هستند که به وسیله آنها می‌توان یک گزاره‌نما را به گزاره تبدیل کرد. به طور کلی اگر $p(x_۱, \cdots, x_k)$ گزاره‌نما باشد، برای هر متغیر مانند y، عبارات $\forall yp$ و $\exists yp$ نیز گزاره‌نما هستند و چگونگی متغیرهای آزاد آنها در دو حالت زیر تشخیص داده می‌شود.

حالت اول: y در p آزاد نیست. در اینص ورت گزاره‌نماهای $\forall yp$ و $\exists yp$ همان گزاره‌نمای p هستند.

حالت دوم: y در p آزاد است. در این حالت y یکی از $x_۱, \cdots, x_k$ است. مثلاً $y = x_i$. برای $k - ۱$ شی $a_۱, \cdots, a_{i-۱}$ و $a_{i+۱}, \cdots, a_k$ گزاره $(\forall yp)(a_۱, \cdots, a_{i-۱}, a_{i+۱}, \cdots, a_k)$ صادق است هرگاه برای هر شی b در عالم سخن گزارهٔ

$$P(a_۱, \cdots, a_{i-۱}, b, a_{i+۱}, \cdots, a_k)$$

صادق باشد.

گزارهٔ $(\exists yp)(a_۱, \cdots, a_{i-۱}, a_{i+۱}, \cdots, a_k)$ صادق است هرگاه برای حداقل یک شی b در عالم سخن گزاره

$$P(a_۱, \cdots, a_{i-۱}, b, a_{i+۱}, \cdots, a_k)$$

صادق باشد.

درحالت دوم با بحثی که داشتیم باید توجه کنید که از تعداد متغیرهای آزاد یکی کم می‌شود.

۱-۷ اثبات وبرهان در منطق ریاضی

برای ارائه برهان و استدلال از سبک‌ها و روش‌های مختلفی استفاده می‌شود. در این بخش این سبک‌ها مورد مطالعه قرار می‌گیرد.

۱) **اثبات گزاره‌های ازنوع $p \Longrightarrow q$.**

روش اول ابتدا فرض می‌کنیم p درست است سپس با استفاده از p و همهٔ قواعد و قضایا، q را نتیجه‌گیری می‌کنیم. دقت کنید که با این روش $p \Longrightarrow q$ را اثبات کرده‌اید، در واقع نشان نداده‌اید که q درست است بلکه صرفاً نشان داده‌اید که اگر p درست باشد q نیز درست است. اینکه p درست است یا نادرست، مطلب دیگری است، اینکه q نیز درست است یا نادرست باز هم بحث دیگری است.

۱-۷-۱ مثال. نشان دهید اگر a عدد صحیح فرد باشد آنگاه $a^۲$ عدد صحیح فرد است.

برهان. اگر a عدد صحیح فردی باشد به ازای kای صحیح $a = ۲k + ۱$ است پس $a^۲ = (۲k + ۱)^۲ = ۴k^۲ + ۴k + ۱$ و از آنجا $a^۲ = ۴k(k + ۱) + ۱$ و در نتیجه $a^۲ = ۲(k(k + ۱)) + ۱$ و $۴k^۲ + ۴k + ۱$ عددی صحیح است. لذا $a^۲$ فرد است.

در این اثبات، از گزاره همشیه درست

$$[(p \Longrightarrow s_۱) \wedge (s_۱ \Longrightarrow s_۲) \wedge \cdots \wedge (s_n \Longrightarrow q)] \Longrightarrow (p \Longrightarrow q)$$

استفاده شده است.

روش دوم. درستی جملهٔ $p \Longrightarrow q$ را می‌توان با اثبات عکس نقیض آن یعنی $\sim q \Longrightarrow \sim p$ بیان کرد. زیرا این دو جمله هم ارز منطقی هستند.

۱-۷-۲ مثال. یک مقسوم علیه سره یک عدد یکی از مقسوم علیه‌هایی است که از آن عدد کوچکتر باشد. عدد تام عددی است که مساوی مجموع مقسوم علیه‌های سره‌اش باشد. مثلاً ۶ عددی تام است. ثابت کنید اگر عدد طبیعی n تام باشد آنگاه n اول نیست.

حل: بهتر است عکس نقیض گزاره شرطی را ثابت کنیم یعنی:

$$\sim (\text{عدد طبیعی } n \text{ تام است}) \Longrightarrow \sim (n \text{ اول نیست})$$

$$\text{عدد طبیعی } n \text{ تام نیست} \Longrightarrow n \text{ اول است}$$

بنابه فرض n اول است بنابراین دو مقسوم علیه بیشتر ندارد یکی از آنها عدد یک و دیگری خود آن عدد است و چون مقسوم علیه سره مورد نظر است پس فقط باید عدد یک را در نظر بگیریم ولی $n \neq ۱$ و برای تام بودن n باید مساوی مجموع مقسوم علیه‌های سره‌اش باشد و این ممکن نیست پس n تام نیست.

۲) اثباتگزاره‌های از نوع $p \Longleftrightarrow q$.

روش اول: نشان می‌دهیم $p \Longrightarrow q$ و $q \Longrightarrow p$.

۱-۷-۳ مثال. ثابت کنید اعداد حقیقی a و b ریشه‌های معادلهٔ $x^۲ + px + q = ۰$ هستند اگر و تنها اگر $ab = q$ و $a + b = -p$.

حل: اگر a و b ریشه‌های معادلهٔ $x^۲ + px + q = ۰$ باشند آنگاه

$$a = \frac{-p + \sqrt{p^۲ - ۴q}}{۲}, b = \frac{-p - \sqrt{p^۲ - ۴q}}{۲} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} a + b = \frac{-p+\sqrt{p^۲-۴q}-p-\sqrt{p^۲-۴q}}{۲} = \frac{-۲p}{۲} = -p \\ ab = \frac{p^۲-p^۲+۴q}{۴} = q \end{cases}$$

بالعکس داریم $ab = q$ و $a + b = -q$ پس

$$b = \frac{۱}{a}q \Longrightarrow a + \frac{۱}{a}q = -p \Longrightarrow a^۲ + q = -ap \Longrightarrow a^۲ + ap + q = ۰$$

یعنی a ریشهٔ معادله $x^۲ + px + q = ۰$ است. به همین ترتیب در مورد b استدلال می‌شود.

روش دوم: ثابت می‌کنیم $p \Longrightarrow q$ و $\sim q \Longrightarrow \sim p$.

مثلاً اگر بخواهیم به این روش ثابت کنیم a زوج است اگر و تنها اگر $a^۲$ زوج باشد باید ثابت کنیم

I) $a^۲$ زوج $\Longrightarrow a$ زوج

II) $a^۲$ زوج نیست $\Longrightarrow a$ زوج نیست

(II) یعنی $a^۲$ فرد $\Longrightarrow a$ فرد که قبلاً نشان داده شده است. برای اثبات (I)، kای وجود دارد که

$$= ۲k \Longrightarrow a^۲ = ۴k^۲ = ۲(۲k^۲) \Longrightarrow a^۲ \text{ زوج}$$

روش سوم: با ایجاد رشته‌ای ازگزاره‌های معادل منطقی که با p شروع شده و به q ختم می‌شوند اثبات کامل می‌شود یعنی

$$((p \Longrightarrow q_۱) \wedge (q_۱ \Longleftrightarrow q_۲) \wedge \cdots \wedge (q_n \Longleftrightarrow q)) \Longrightarrow (p \Longleftrightarrow q)$$

از این روش اثبات در تئوری مجموعه‌ها استفاده‌های زیادی می‌شود.

۳) اثبات جمله‌های از نوع $\forall x p(x)$:

فرض می‌کنیم x عضو دلخواهی از عالم سخن باشد و نشان می‌دهیم $p(x)$ درست است سپس چون x عضو دلخواهی از عالم سخن است نتیجه می‌گیریم $\forall x p(x)$ درست است.

۱-۷-۴ مثال. ثابت کنید هر تابع مشتق‌پذیر پیوسته است.

حل: فرض می‌کنیم f تابع دلخواه مشتق‌پذیری باشد و نشان می‌دهیم پیوسته است:

$$\lim_{x\longrightarrow a}(f(x)-f(a)) = \lim_{x\longrightarrow a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}(x-a) = \lim_{x\longrightarrow a}(\frac{f(x)-f(a)}{x-a})\lim_{x\longrightarrow a}(x-a)$$

$$= f'(a)\times 0 = 0 \Longrightarrow \lim_{x\longrightarrow a} f(x) = f(a) \Longrightarrow \text{پیوسته } f$$

۴) اثبات جمله‌های از نوع $\exists x p(x)$:

ثابت می‌کنیم در عالم سخن xای وجود دارد که در ازای آن $p(x)$ درست است.

۱-۷-۵ مثال. ثابت کنید تابعی وجود دارد که پیوسته هست ولی مشتق‌پذیر نیست.

حل: تابع با ضابطه $f(x) = |x|$ را که در مبداء پیوسته است از عالم سخن انتخاب می‌کنیم. این تابع در $x = 0$ مشتق‌پذیر نیست.

۵) اثبات به روش حالت‌ها:

به طور کلی اگر برای اثبات جملهٔ s لازم باشد که n حالت مختلف (همهٔ حالات ممکن) را با p_1 و p_2 و $\cdots$ و p_n نشان دهیم اثبات به روش حالت‌ها حاکی از آن است که بتوانیم نشان دهیم $p_1 \Longrightarrow s$ و $p_2 \Longrightarrow s$ و $\cdots$ و $p_n \Longrightarrow s$ درست هستند و به این ترتیب درستی جملهٔ زیر ثابت شده است:

$$((p_1 \Longrightarrow s) \wedge \cdots (p_n \Longrightarrow s)) \Longrightarrow ((p_1 \vee \cdots \vee p_n) \Longrightarrow s)$$

۱-۷-۶ مثال. ثابت کنید اگر x یک عدد حقیقی باشد آنگاه $|-x| = |x|$ است.

حل: اگر x عددی حقیقی باشد سه حالت رخ می‌دهد:

۱) $x > 0$ است پس $-x < 0$ است و طبق تعریف قدرمطلق $|x| = x$ و $|-x| = -(-x) = x$ می‌شود یعنی در این حالت $|-x| = |x|$.

۲) $x < 0$ است پس $-x > 0$ است و داریم $|x| = -x$ و $|-x| = -x$ پس باز هم $|-x| = |x|$.

۳) $x = 0$ است پس $-x = 0$ پس $|x| = 0$ و $|-x| = 0$ و در نتیجه $|-x| = |X|$ می‌شود.

بنابراین در هر حالت از x حقیقی داریم $|-x| = |x|$.

۶) اثبات به کمک استقرا:

اثبات به وسیله استقرای ریاضی فقط برای اثبات جمله‌های دارای عالم سخن $\mathbb{N}$ یا $\mathbb{N} \cup \{0\}$ به کار می‌رود. راجع به این روش در فصل‌های آتی به تفصیل بحث خواهد شد.

۷) اثبات با تناقض (برهان خلف یا اثبات غیر مستقیم):

تناقض گزاره‌ای است که مستقل از ارزش مؤلفه‌هایش همواره نادرست است. مثلاً جملهٔ $s \wedge \sim s$ همواره نادرست می‌باشد.

اثبات جمله‌ای مانند p با تناقض، اثباتی است که در آن $\sim p$ را می‌پذیریم و از آن جمله‌ای با الگوی $q \wedge \sim q$ بدست می‌آوریم که در آن q جمله‌ای است شامل p ، یک اصل موضوع یا هر قضیهٔ قبلاً اثبات شده‌ای. در واقع نشان داده‌ایم گزاره شرطی زیر همواره درست است:

$$(\sim p \Longrightarrow (q \wedge \sim q)) \Longrightarrow p$$

در واقع می‌دانیم که p یا درست است یا نادرست ولی همزمان درست و نادرست نیست، پس اگر درستی $\sim p$ را بپذیریم و از آن جمله‌ای حاصل شود که هم درست است هم نادرست آنگاه $\sim p$ نمی‌تواند درست باشد و در نتیجه p باید درست باشد.

در اثبات جمله‌هایی از نوع $p \Longrightarrow q$ با برهان خلف فرض می‌کنیم $\sim (p \Longrightarrow q)$ یعنی $p \wedge \sim q$ درست است پس فرض می‌کنیم هر دوگزارهٔ p و $\sim q$ درست‌اند و از آن جمله‌ای به صورت $s \wedge \sim s$ بدست می‌آوریم.

۱-۷-۷ مثال. ثابت کنید به ازای هر x حقیقی، $x \neq 0 \Longrightarrow \frac{1}{x} \neq 0$.

حل: فرض کنیم xای وجود دارد که

$$x \neq ۰ \wedge \frac{۱}{x} = ۰$$

در این صورت از یک سو $x\frac{۱}{x} = ۱$ و از سوی دیگر $x\frac{۱}{x} = ۰$ و در نتیجه تناقض $۱ = ۰$ بدست می‌آید.

۸) اثبات جمله‌هایی از نوع $\exists! p(x)$:

اثبات این نوع جملات از دو بخش تشکیل می‌شود:

الف) ثابت می‌کنیم xای وجود دارد که $p(x)$ درست است.

ب) فرض می‌کنیم برای هر دوعضو دلخواه عالم سخن مانند z و x، هم $p(x)$ و هم $p(z)$ درست باشند، ثابت می‌کنیم $x = z$.

۱-۷-۸ مثال. ثابت کنید در مجموعه اعداد حقیقی x منحصر به فردی وجود دارد به طوری که به ازای هر y جملهٔ زیر درست است:

$$x + y = y + x = y$$

حل: ابتدا نشان می‌دهیم xای وجود دارد. در واقع این x همان صفر است زیرا

$$\forall y(۰ + y = y + ۰ = y)$$

حال نشان می‌دهیم صفر (همان x) یکتاست:

$$\begin{cases} \forall y(x + y = y + x = y) & (۱) \\ \forall y(z + y = y + z = y) & (۲) \end{cases}$$

حالا کافی است در(۱)، z به جای y قرار دهیم، داریم

$$x + z = z + x = z$$

و در (۲) به جای y، x را قرار می‌دهیم درنتیجه $z + x = x + z = x$ و بنابراین $x = z$. تا اینجا روشهای اثبات را یاد گرفتیم. بدیهی است بلد بودن این روشها هیچ تضمینی برای به وجود آوردن یک اثبات نیست.

آفریدن اثبات خود یک هنر است. پرسیده می‌شود: از کجا شروع کنیم؟ چطور ادامه طریق بدهیم؟ چگونه به حکم مورد نظر برسیم؟

اگر می‌خواهید در ریاضیات مهارت داشته باشید باید زیاد تمرین کنید و با اثبات‌های گوناگون آشنا شوید. یک راه اثبات وارونه عمل کردن است. می‌خواهید $p \Longrightarrow q$ را ثابت کنید با q شروع کرده سعی کنید rای بیابید که $r \Longrightarrow q$ سپس سعی کنید sای پیدا کنید که $s \Longrightarrow r$ و .... ممکن است در این مسیر پی ببرید به اینکه $p \Longrightarrow s$ و به این ترتیب $p \Longrightarrow q$ ثابت می‌شود.

ممکن است q را در نظر بگیرید و تا آنجا که قادرید نتایج حاصل از آن را بدست آورید و مراحل مختلف کار را وارسی کنید.

گاهی آزمون و خطا را به کار ببرید. اگر راه خاصی برای رسیدن از p به q به نظرتان نمی‌رسد، مأیوس نشوید. شروع کنید. درگیر شوید. کاری انجام دهید. روشهای مختلف را حتی شاید گاهی به ظاهر بی‌ربط! به کار ببرید. ممکن است ناگهان به نتیجه برسید.

همهٔ ریاضیدان‌ها از همان ابتدای بررسی احکام به سهولت به نتیجه نرسیده‌اند. آنها هم گاهی از مسیرهای تاریک عبور کرده و حتی گاه مرتکب اشتباه شده‌اند.

به تعاریف دقت کافی داشته باشید و از قضایای قبلاً ثابت شده استفاده کنید و آنها را حاضرالذهن داشته باشید. از برهان‌های مشابه کمک بگیرید.

۱-۸ منطق‌های سه‌ارزشی و فازی و مقایسهٔ آنها با منطق دوارزشی کلاسیک

دوارزشی بودن گزاره‌ها و اینکه هرگزاره‌ای (و نه هر جمله‌ای) دارای یکی از دو ارزش درست یا نادرست است یکی از مهم‌ترین اصولی است که در منطق کلاسیک و در بسیاری از فکرهای انسان وجود دارد.

در این بین باید توجه داشت که تمام جزءهای اندیشه و محاسبات، گزاره‌های منطقی نیستند. تعدادی از آنها متغیرهای ریاضی یا طبیعی بوده و می‌توانند مقدارهایی در دامنهٔ مخصوص به خود، مثل اعداد طبیعی، اعداد موهومی، مجموعه صفات انسانی و مانند آنها بگیرند.

برخی از متخصصین معتقدند برای از بین بردن ناتوانی منطق کلاسیک (دوارزشی) یا برای پدید آوردن نسخه‌ای که در میدان‌های خاص نیز کاربرد داشته باشد باید برخی اصول را تغییر داد. یکی از اصولی که تغییرش مورد توجه زیادی قرارگرفته، دو ارزشی بودن منطق است. در این راستا سیستم‌هایی پیشنهاد شده است که دارای تعداد ارزش بیشتری باشند.

در این بخش می‌خواهیم چنین سیستم‌هایی را مطالعه کنیم. براساس اعتقادی که بیان می‌کند به تعدادی ازگزاره‌ها نمی‌توان هیچیک از دوارزش درست یا نادرست را نسبت داد سیستم سه‌ارزشی بوجود آمده است. عده‌ای نیز اعتقاد دارند آنچه در زبان طبیعی یا حتی به اعتقاد برخی در واقعیت وجود دارد پیوسته است وچون علی‌القاعده پیوستگی را نمی‌توان با گسستگی مدل‌بندی کرد برای تحلیل آنچه در واقعیت یا روابط انسانی اتفاق می‌افتد نیاز به منطقی داریم که دارای ارزش‌های پیوسته باشد به عبارت دیگر بی‌نهایت ارزش داشته باشد(منطق بی‌نهایت ارزشی یا فازی). بیش از همهٔ منطق‌های چند ارزشی که در حد تئوری‌های محض باقی مانده‌اند، منطق بی‌نهایت ارزشی (فازی) است که در تکنولوژی جای خود را بازکرده است.

یکی از مهم‌ترین سیستم‌های سه‌ارزشی، سیستم کلینی[۱۱] است. این سیستم ارزش سوم را غیر قابل محاسبه معرفی می‌کند این ارزش را نامعلوم نیز معرفی می‌کنند که منظور از آن گزاره‌ای است که ارزش کلاسیک دارد ولی مقدارش برای ما ناشناخته است. البته ارزش سوم کلینی را می‌توان معادل با خروجی تابعی دانست که قادر به محاسبهٔ خروجی صفر یا یک (نادرست یا درست) خود نمی‌باشد. انگار تابع برای محاسبهٔ مقدار خروجی در حلقه‌ای (LOOP) بی‌نهایت قرار بگیرد. به این ترتیب خروجی متناظر با تابع را به صورت مجازی، خ فرض می‌کنیم، در عین حال ترجیح می‌دهیم تبدیلی بین نادرست و درست رخ ندهد زیرا مایلیم ارزش‌های نادرست و درست با افزایش اطلاعات یک جمله، تغییر نکنند و تنها جمله‌هایی که مقدارشان نامعلوم بود بتوانند معلوم شوند، این خصوصیت را monotonicity یا regularity می‌نامیم.

براساس معنای ذکر شده برای خ و قید monotinic بودن سه سیستم قوی و ضعیف و میانه به صورت زیر طراحی می‌شود.

---

۱۱) Kleene (استیون کل کلینی) در سال ۱۹۰۴ در هارتفورد آمریکا به دنیا آمد و در سال ۱۹۹۴ فوت کرد.

۹-۱ سیستم قوی کلینی

در این سیستم جدول‌های ارزش زیر ارائه می‌شود. t متناظر با درست (= true) و f متناظر با نادرست (= false) است معنای خ نیز در بالا گفته شده:

p	$\sim p$
t	f
i	i
f	t

نقیض تابعی است تک جایگاهی، بنابراین در جدول نقیض عبارتی که محاسبه‌ناپذیر باشد، محاسبه ناپذیر است و نمی‌تواند نتیجه‌ای محاسبه شده (t یا f) بدست آورد. (اپراتور نقیض در تمام سیستم‌های کلینی رفتار ثابتی دارد).

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \Longrightarrow q$	$p \Longleftrightarrow q$
t	t	t	t	t	t
t	i	i	t	i	i
t	f	f	t	f	f
i	t	i	t	t	i
i	i	i	i	i	i
i	f	f	i	i	i
f	t	f	t	t	f
f	i	f	i	t	i
f	f	f	f	t	t

اگر سیستمی سه‌ارزشی در نظر بگیریم و ارزش سوم را «نمی‌دانم» معرفی کنیم، بهترین سیستمی که می‌توان برایش بنا ساخت سیستم کلینی قوی است. مثلاً، نمی‌دانیم چیزی را که نمی‌دانیم با چیز دیگری که نمی‌دانیم برابر است یا نه، ارزش نمی‌دانم (i) خواهد داشت (خانهٔ پنجم $p \Longleftrightarrow q$). چیزی که نمی‌دانیم درست است یا نه را نمی‌دانیم پس خانه دوم $p \Longleftrightarrow q$ هم نمی‌دانم (i) خواهد بود. به این ترتیب می‌توان تمام

ارزش‌های جدول بالا را مشخص کرد. البته جمله‌هایی مانند $p \wedge \sim p$ ارزشی خلاف آنچه توقع داریم بدست خواهند آورد.

۱-۹-۱ سیستم ضعیف کلینی. حالت دیگری که می‌توان در نظرگرفت آن است که سیستم برای بدست آوردن ارزش منطقی یک عبارت ابتدا ارزش منطقی تک تک جمله‌ها را تعیین کند و سپس براساس نتایج بدست آمده ارزش کل عبارت را محاسبه کند. در نتیجه در تمام اپراتورها اگر تنها یکی از ورودیها مقدار خ داشته باشد، خروجی i خواهد بود. سایر خانه‌ها نیز ارزش منطق کلاسیک (دوارزشی) را خواهند داشت.

p	$\sim p$
t	f
i	i
f	t

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \Longrightarrow q$	$p \Longleftrightarrow q$
t	t	t	t	t	t
t	i	i	i	i	i
t	f	f	t	f	f
i	t	i	i	i	i
i	i	i	i	i	i
i	f	i	i	i	i
f	t	f	t	t	f
f	i	i	i	i	i
f	f	f	f	t	t

۱-۹-۲ سیستم میانی کلینی. در این سیستم عبارت‌ها از چپ به راست در نظر گرفته می‌شوند (به جدول دقت کنید)

p	$\sim p$
t	f
i	i
f	t

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \Longrightarrow q$	$p \Longleftrightarrow q$
t	t	t	t	t	t
t	i	i	i	i	i
t	f	f	t	f	f
i	t	i	i	i	i
i	i	i	i	i	i
i	f	i	i	i	i
f	t	f	t	t	f
f	i	f	t	t	i
f	f	f	f	t	t

در هر سه نوع سیستم مشکلی وجود دارد. اگر p غیر قابل محاسبه باشد $\sim p$ نیز چنین است و $p \vee \sim p$ بر طبق جدول مقدار خ می‌گیرد(در تمام سیستم‌ها $i \vee i \cong i$) و این در حالی است که توقع داریم مقدار $p \vee \sim p$ مستقل از ارزش p همواره محاسبه‌پذیر و برابر با مقدار t باشد.

متأسفانه به نظر می‌رسد سیستم‌های سه‌ارزشی دیگر نیز این مشکل را دارند، طوری که عده‌ای معتقدند ایده محاسبه‌ناپذیری قابل بیان به صورت تابع ارزش نیست. علاوه بر سیستم کلینی متداول‌ترین منطق‌های سه‌ارزشی، سیستم‌های لوگاسیویچ[۱۲]، بوخوار[۱۳] و پست[۱۴] می‌باشد. البته متخصصین دیگری نیز وجود دارند که سیستم‌هایی سه ارزشی ارائه کرده‌اند با این حال سیستم‌های آنها تقریباً منطبق بر سیستم افراد ذکر شده است و به دلیل جلوگیری از اطالهٔ کلام از بیان آنها خوددارد می‌گردد.

12) Lukasiewicz 13) Bochrar 14) Post

۱-۱۰ منطق فازی

در منطق فازی برخلاف منطق کلاسیک (یا بولی[15]) گزاره‌ها می‌توانند علاوه بر مقادیر صفر (نادرست) و یک (درست) مقادیر حقیقی بین صفر و یک را نیز اختیار کنند. در منطق کلاسیک یا منطق $\sim$ ارزشی به علت محدود بودن مقادیری که گزاره‌ها می‌توانستند اختیار کنند می‌توانستیم اپراتورها (یعنی $\sim$ و $\wedge$ و $\vee$ و $\Longrightarrow$ و $\Longleftrightarrow$) را در جدول‌های درستی به نمایش بگذاریم. ولی مقادیر درستی گزاره‌ها در منطق فازی بی‌نهایت مقدار است و امکان تشکیل جدول درستی از ما سلب می‌شود.

مهمترین سیستم بی‌نهایت ارزشی (فازی)، سیستم لوکاسیویچ است. اگر ارزش‌های این سیستم را مقادیر حقیقی پیوسته در بازهٔ $[0, 1]$ در نظر بگیریم و $v(p)$ ارزش گزارهٔ p باشد ارزش گزاره‌های مرکب ساخته شده با $\wedge$ و $\vee$ و $\Longrightarrow$ و $\Longleftrightarrow$ و گزارهٔ $\sim p$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$v(\sim p) = 1 - v(p)$$

$$v(p \vee q) = \max\{v(p), v(q)\}$$

$$v(p \wedge q) = \min\{v(p), v(q)\}$$

$$v(p \Longrightarrow q) = \max\{1 - v(p), v(q)\}$$

$$v(p \Longleftrightarrow q) = \begin{cases} 1; & v(p) = v(q) \\ 0; & v(p) \neq v(q) \end{cases}$$

۱-۱۰-۱ مثال. اگر $v(p) = \frac{1}{2}$ و $v(q) = \frac{1}{3}$ باشد ارزش گزارهٔ $(p \wedge q) \Longrightarrow p$ در سیستم بی‌نهایت ارزشی چقدر است؟

حل: اگر $p \wedge q$ را r فرض کنیم داریم

$$v(r) = v(p \wedge q) = \min\{v(p), v(q)\} = \min\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\} = \frac{1}{3}$$

$$v((p \wedge q) \Longrightarrow p) = v(r \Longrightarrow p) = \max\{1 - v(r), v(p)\} = \max\{1 - \frac{1}{3}, \frac{1}{2}\} = \frac{2}{3}$$

15) Boolean

مهمترین کاربرد سیستم‌های چندارزشی، آنالیز داده‌های متناقض است و این در حالی است که بیشترین استفاده کننده‌های منطق فازی، مهندسین برق هستند. آنها از این منطق برای طراحی کنترلرهای مختلف استفاده می‌کنند. کنترل نحوه‌ی حرکت آسانسور، قطار، جرثقیل و مانند آنها که در حرکت‌های آنها باید سرعت زیاد باشد و هم در نقاط توقف ملایمت کافی وجود داشته باشد از استفاده‌های دیگر کاربردی منطق فازی است. در نهایت می‌توان از کاربرد این سیستم در سیستم‌های تهویه مطبوع و پارامترهای ماشین لباسشویی نام برد.

۱۱-۱ مجموعه

با کمال تأسف، مفهوم اساسی نظریه، یعنی مجموعه را نمی‌توان به طور دقیق تعریف کرد. به طور ساده می‌توان گفت مجموعه یعنی گروه، خانواده، دستگاه کلکسیون، گردایه و از این قبیل ولی هیچیک از اینها تعریف ریاضی مجموعه نیست. شاید بتوان ادعا کرد که بهترین تعریف از جرج کانتور[۱۶] بانی نظریه مجموعه‌هاست که چنین بیان می‌کند:« مجموعه عبارت است از یک فراوانی که در ذهن ما به صورت واحد در می‌آید» اشیایی که یک مجموعه را به وجود می‌آورند عضوهای آن نامیده می‌شوند. برای اینکه نشان دهند مجموعهٔ A از عضوهای x و y و . . .تشکیل شده است می‌نویسند:

$$A = \{x, y, \cdots\}$$

مثلاً مجموعه فصل‌های سال {زمستان و پاییز و تابستان و بهار} می‌باشد.

توجه کردید که مجموعه‌ها با حروف بزرگ و اعضا باحروف کوچک نشان داده می‌شوند.

اگر عضو x متعلق به مجموعه A باشد می‌نویسند $x \in A$. علامت $\in$، علامت عضویت است.

اگر عضو x متعلق به A نباشد می‌نویسند $x \notin A$. مثلاً اگر $\mathbb{N}$ مجموعه همه عددهای طبیعی باشد داریم $۱۲ \in \mathbb{N}$ ولی $\frac{۱}{۳} \notin \mathbb{N}$.

دقت کنید، عضوهای یک مجموعه لازم نیست در عالم واقع وجود داشته باشند. مثلاً مجموعه همهٔ پزشکانی که یک سال سن دارند، مجموعه‌ای است که هیچ عضوی ندارد. این مجموعه را تهی نامیده و با نماد ϕ یا $\{\}$ نشان می‌دهیم. $\phi \in \phi$ و یا $\phi \in \{\}$ بی‌معنی است ولی $\phi \in \{\phi\}$ درست است.

16) George Cantor

برای نمایش یک مجموعه می‌توان فهرست کاملی از اعضای آن را داخل آکولاد نوشت. مثلاً مجموعهٔ همهٔ معلمین یک مدرسه از این نوع است. ولی اگر مجموعه بزرگ باشد به عبارت دیگر تعداد اعضایش بسیار زیاد باشد چنین چیزی ممکن نیست. مثلاً مجموعه همهٔ عددهای صحیح، مجموعه همهٔ ماهیهای اقیانوس آرام از این نوع هستند. امّا در این حالت مجموعه را به کمک خاصیت مشترک اعضایش مشخص می‌کنیم. به عنوان مثال می‌نویسیم:

$$\{x|\text{عدد صحیح است } x\}$$

$$\{x|\text{ماهی اقیانوس آرام است } x\}$$

علامت خط عمودی را «به طوری که» می‌خوانیم.

در تعریف مجموعه باید دقتی وجود داشته باشد که بتوان اظهار نظر کرد که عضوی مانند x به آن تعلق دارد یا خیر.

معلوم است که یک مجموعه نمی‌تواند عضو خودش باشد(مثلاً مجموعه عددهای صحیح خود یک عدد صحیح نیست، مجموعه همهٔ مثلث‌ها خود یک مثلث نیست). ولی مجموعه‌هایی هم وجود دارند که شامل خود به عنوان عضوی از آن مجموعه می‌باشند. مثلاً مجموعه مفاهیم انتزاعی خود یک مفهوم انتزاعی است. ما این نوع مجموعه‌ها را نامتعارف نامیده و در مطالعهٔ خود تنها مجموعه‌های متعارف را بررسی می‌کنیم. اجازه بدهید ذهن خواننده را به یک چالش واداریم.

فرض کنیم A مجموعه‌ای است که عضوهایش همهٔ مجموعه‌های متعارف باشند. آیا این تعریف خالی از اشکال نیست؟ خود مجموعهٔ A از چه نوع است؟ متعارف یا نامتعارف؟ اگر A متعارف باشد باید یکی از اعضای خودش باشد زیرا A شامل همه متعارف‌هاست ولی اگر A یکی از اعضای خودش باشد طبق تعریف باید یک مجموعه نامتعارف باشد! اگر A را نامتعارف فرض کنیم باید بتواند یکی از اعضای خودش باشد واین نیز ممکن نیست زیرا بین عضوهای مجموعهٔ A تنها مجموعه‌های متعارف وجود دارند و مجموعه‌ای نامتعارف نمی‌تواند عضو آن باشد!

پس این مجموعه نه می‌تواند متعارف باشد و نه نامتعارف! این تناقض را چگونه توجیه ممی‌کنید؟ تعریف یک مجموعه باید شفاف و خالی از اشکال باشد و بتوان به صراحت گفت ششی‌ای عضو آن هست یا نیست.

از اینجا به بعد ما تنها به مجموعه‌هایی می‌پردازیم که تتعریفی دقیق و بدون نقص و تناقض دارند و تشکیل آنها بدون هیچ شک و ابهامی اانجام می‌گیرد.

ترتیب عضوها در مجموعه‌ها اهمیتی ندارد و تکرار عضوها بی معنی است. اگر دو مجموعه دقیقاً دارای عناصر یکسان باشند آنها را مساوی می‌نامیم. مثلاً $A = \{۱, ۲\}$ مساوی $B = \{۲, ۱\}$ است. اگر A و B مساوی نباشند می‌نویسیم $A \neq B$.

مجموعهٔ $\{x\}$ مجموعه‌ای تک عضوی است و ϕ مجموعه‌ای هیچ عضوی می‌باشد.

۱-۱۱-۱ زیرمجموعه. مجموعهٔ A را زیر مجموعهٔ B می‌نامیم و می‌نویسیم $A \subseteq B$ هرگاه همهٔ اعضای A عضو B باشند. بلافاصله متوجه می‌شویم که هر مجموعه زیر مجموعه خودش است و طبق تعریف تساوی مجموعه‌ها، $A = B$ اگر وتنها اگر $A \subseteq B$ و $B \subseteq A$. اگر A زیرمجموعه B نباشد می‌نویسیم $A \nsubseteq B$ در این صورت عضوی در A هست که در B نیست. اگر $A \subseteq B$ ولی $A \neq B$ می‌نویسیم $A \subset B$ و A را زیرمجموعه سره یا اکید یا محض B می‌نامیم.

تذکر. جمله‌های زیر نادرست هستند:

$$\{a, b\} \in \{a, b\}, \phi \in \phi$$

$$\phi = \{\phi\}, ۳ = \{۳\}, ۳ \subset \{۳\}$$

در واقع اگر بخواهیم $A \in B$ را تحقیق کنیم مجموعهٔ A به عنوان یک واحد در نظر گرفته شده بررسی می‌شود که آیا عضو B هست یا نه. در مطالعهٔ $A \subseteq B$، باید همهٔ عناصر A را در نظر گرفته و ثابت کنیم عضوی از مجموعهٔ B هستند.

۱-۱۱-۲ مثال. مجموعه‌ای مانند A را مثال بزنید که هم عضو B باشد و هم زیرمجموعهٔ آن.

حل: فرض کنید $A = \{a, b\}$ و $B = \{a, b, \{a, b\}\}$ در این صورت $A \in B$ و $A \subseteq B$.

مجموعه مرجع. مجموعهٔ مرجع همان عالم سخن است. معمولاً همهٔ مجموعه‌هایی که در بحث‌های مختلف با آنها سروکار داریم زیرمجموعه‌ای از یک مجموعه ثابت هستند که آن را مجموعهٔ مرجع می‌نامند و با M یا U نشان می‌دهند.

۱-۱۱-۳ مجموعهٔ توان. اگر A یک مجموعه باشد، مجموعهٔ همهٔ زیرمجموعه‌های A را با نماد ۲^A یا $p(A)$ نشان داده آن را مجموعهٔ توان A می‌نامیم پس $p(A) = \{X|X \subseteq A\}$.

۱-۱۱-۴ مثال. مطلوبست $p(\phi)$ و $p(p(\phi))$.

حل:

$$p(\phi) = \{\phi\}$$

$$p(p(\phi)) = \{\phi, \{\phi\}\}$$

در مثال قبل ϕ را به عنوان یکی از زیرمجموعه‌های $\{\phi\}$ در نظرگرفتیم در واقع ϕ زیرمجموعهٔ هر مجموعهٔ دلخواه مانند A است، زیرا:

$$\forall x(x \in \Longrightarrow x \in A)$$

مقدم این گزاره شرطی نادرست است (زیرا ϕ عضوی ندارد) تالی آن چه درست و چه نادرست باشد کل گزاره شرطی درست است.

اگر $A \subseteq B$ باشد و هر زیرمجموعهٔ دلخواه A زیرمجموعه‌ای از B هم هست پس هر عضو $p(A)$ عضوی از $p(B)$ است در نتیجه $p(A) \subseteq p(B)$.

۱-۱۱-۵ تفاضل دو مجموعه. فرض کنیم A و B دو مجموعه باشند، مجموعه $A - B$ عبارتست از مجموعهٔ همهٔ عناصری که عضو A هستند ولی عضو B نیستند و آن را تفاضل A از B می‌نامیم.

$$A - B = \{x|x \in A, x \notin B\}$$

برای اینکه بتوان مجموعهٔ B را از A کم کرد به هیچ وجه لازم نیست که مجموعهٔ B جزئی از مجموعهٔ A باشد. کم کردن B از A به معنی بیرون کردن عضوهای مشترک دو مجموعهٔ A و B از مجموعهٔ Aاست. اگر A زیرمجموعه‌ای از M در نظرگرفته شود مجموعهٔ $M - A$ مکمل یا متمم A نسبت به M نامیده شده و بانماد A' نشان داده می‌شود.

$$A' = M - A = \{x|x \in M|x \notin A\}$$

به سادگی می‌توان نشان داد برای هر دو مجموعهٔ A و B:

$$A - B = B' - A'$$

$$A \subseteq B \Longrightarrow B' \subseteq A'$$

۱-۱۱-۶ اشتراک دومجموعه. اگر A و B دو مجموعه باشند اشتراک A و B بانماد $A \cap B$ نشان داده شده مجموعهٔ همهٔ عضوهای مشترک A و B است.

$$A \cap B = \{x | x \in A, x \in B\}$$

۱-۱۱-۷ دومجموعه جدااز هم. مجموعه‌های A و B را جدا می‌نامیم هرگاه عضو مشترکی وجود نداشته باشند. به عبارت دیگر $A \cap B = \phi$. مثلاً مجموعهٔ همهٔ اعداد طبیعی زوج و مجموعهٔ همهٔ اعداد طبیعی فرد از هم جدا هستند.

۱-۱۱-۸ اجتماع دو مجموعه. اجتماع مجموعه‌های A و B با نماد $A \cup B$ نشان داده شده عبارت است از مجموعهٔ همهٔ عناصری که به A یا B یا هر دو تعلق دارند

$$A \cup B = \{x | x \in A \text{ یا } x \in B\}$$

مثلاً اگر $A = \{a, b, c\}$ و $B = \{c, d\}$ باشد $A \cup B = \{a, b, c, d\}$.

چند خاصیت زیرمجموعه.

$$A \subseteq B \Longrightarrow \begin{cases} A \cap B = A \\ A \cup B = B \\ A - B = \phi \\ B \cup A' = M \\ A \cap B' = \phi \end{cases}$$

چند خاصیت مجموعه‌های جدا‌ازهم.

$$A \cap B = \phi \Longrightarrow \begin{cases} A \subseteq B' \\ B \subseteq A' \\ A - B = A \\ B - A = B \\ A \cap B' = A \\ B \cap A' = B \end{cases}$$

۱-۱۱-۹ خواص ابتدایی اشتراک واجتماع.

$$A \cup A = A \qquad A \cap A = A$$

$$A \cup \phi = A \qquad A \cap \phi = \phi$$

$$A \cup M = M \qquad A \cap M = A$$

$$A \cup A' = M \qquad A \cap A' = \phi$$

۱-۱۱-۱۰ جبرمجموعه‌ها.

$$A \cup B = B \cup A \qquad A \cap B = B \cap A,$$

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C \qquad A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C,$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \qquad A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C),$$

$$M = \phi \qquad \phi' = M,$$

$$(A \cup B)' = A' \cap B' \qquad (A \cap B)' = A' \cup B',$$

$$A \cup (A \cap B) = A \qquad A \cap (A \cup B) = A,$$

$$A \cup (A' \cap B) = A \cup B \qquad A \cap (A' \cup B) = A \cap B,$$

۱-۱۱-۱۱ تفاضل متقارن. مجموعهٔ همهٔ عضوهای غیرمشترک A و B را تفاضل متقارن مجموعه‌های A و B می‌نامند و با $A \operatorname{tr} B$ نشان می‌دهند. بنابراین

$$A \operatorname{tr} B = (A - B) \cup (B - A) = (A \cup B) - (A \cap B)$$

۱-۱۱-۱۲ خواص اساسی مجموعه‌ها.

$A \operatorname{tr} B = B \operatorname{tr} A$

$A \operatorname{tr} \phi = A$

$A \operatorname{tr} A = \phi$

$A \operatorname{tr} A' = M$

$A \operatorname{tr} M = A'$

$$\begin{cases} A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C) & \text{توزیع پذیری } \cap \text{ روی تفاضل و تفاضل متقارن} \\ A \cap (B \operatorname{tr} C) = (A \cap B) \operatorname{tr}(A \cap C) \end{cases}$$

$$\begin{cases} (A \cup B) - C = (A - C) \cup (B - C) \\ (A \cap B) - C = (A - C) \cap (B - C) & \text{توزیع‌پذیری تفاضل از راست روی } \cup \text{و } \cap \text{و } - \text{ و tr} \\ (A - B) - C = (A - C) - (B - C) \\ (A \operatorname{tr} B) - C) = (A - C) \operatorname{tr}(B - C) \end{cases}$$

$$\begin{cases} A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C) \\ A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C) \end{cases}$$

$A \subseteq B \underset{\not\Leftarrow}{\Longrightarrow} A \cap C = B \cap C$

$A \subseteq B \underset{\not\Leftarrow}{\Longrightarrow} A \cup C = B \cup C$

$$\begin{cases} A \cap C \subseteq B \cap C \\ A \cup C \subseteq B \cup C \end{cases} \Longrightarrow A \subseteq B$$

$$A = B \underset{\not\Leftarrow}{\Longrightarrow} A \cap C = B \cap C$$

$$A = B \underset{\not\Leftarrow}{\Longrightarrow} A \cup C = B \cup C$$

$$\begin{cases} A \cap C = B \cap C \\ A \cup C = B \cup C \end{cases} \Longrightarrow A = B$$

$$A \subseteq B, C \subseteq D \Longrightarrow A \cap C \subseteq B \cap D, A \cup C \subseteq B \cup D, A - D \subseteq B - C, C - B \subseteq D - A$$

۱-۱۱-۱۳ مثال. در هر یک از موارد ذکر شدهٔ زیر با توجه به فرض حاصل عبارت را بدست آورید:

۱) $B \cap C = \phi \Longrightarrow (A - B) \cup (A - C) \cup (A - D) = ?$

$$(A - B) \cup (A - C) \cup (A - D) = A - (B \cap C \cap D) = A - (\phi \cap D) = A - \phi = A$$

۲) $A \subseteq B, C \subseteq B, A \cap C = \phi \Longrightarrow [(A \cup C) \cap B] \cap A' = ?$

$$[(A \cup C) \cap B] \cap A' = [(A \cap B) \cup (C \cap B)] \cap A' = (A \cup C) \cap A' = A \cap C$$

۳) $A \cap B = \phi \Longrightarrow (A - C) \cap (B - C) = ?$

$$(A - C) \cap (B - C) = (A \cap B) - C = \phi - C = \phi$$

تعریف (تعمیم اشتراک واجتماع). فرض کنیم $\mathcal{A}$ مجموعه‌ای از مجموعه‌ها باشد یعنی همهٔ عناصر $\mathcal{A}$ مجموعه باشند. اجتماع $\mathcal{A}$ و اشتراک $\mathcal{A}$ که ترتیب با نمادهای $\cup\mathcal{A}$ و $\cap\mathcal{A}$ نمایش داده می‌شود مجموعه‌هایی هستند که به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\cup \mathcal{A} = \{x | \text{حداقل به یک مجموعه از عناصر } \mathcal{A} \text{ تعلق دارد}\} = \bigcup_{X \in \mathcal{A}} X$$

$$\cap \mathcal{A} = \{x | \text{به هر یک از عناصر } \mathcal{A} \text{ تعلق دارد}\} = \bigcap_{X \in \mathcal{A}} X$$

مثلاً اگر $\mathcal{A} = \{X, Y, Z\}$ آنگاه

$$\cup \mathcal{A} = X \cup Y \cup Z$$

$$\cap \mathcal{A} = X \cap Y \cap Z$$

۱-۱۱-۱۴ مثال. فرض کنیم $\mathcal{A} = \{\{۲, ۳, ۱\}, \{۵, \{۵\}\}, \{۲, \phi\}\}$ در این صورت

$$\cup \mathcal{A} = \{۱, ۲, ۳, \phi, ۵, \{۵\}\}$$

$$\cap \mathcal{A} = \phi$$

۱-۱۱-۱۵ مثال. فرض کنیم $A_n = \{x | \frac{۱}{n} \leq x \leq \frac{۲}{n} : x \in \mathbb{R}\}, n \in \mathbb{N}$ در این صورت $\bigcup_{n=۱}^{\infty} A_n$ کدام است؟

حل:

$$\bigcup_{n=۱}^{\infty} A_n = A_۱ \cup A_۲ \cup \cdots \cup A_n = [۱, ۲] \cup [\frac{۱}{۲}, ۱] \cup [\frac{۱}{۲}, \frac{۲}{n}]_{n \longrightarrow +\infty} =]۰, ۲]$$

۱-۱۱-۱۶ قضیه. اگر A یک مجموعه و $\mathcal{A}$ مجموعه‌ای از مجموعه‌ها باشد داریم:

الف) $A \cup (\bigcap_{x \in \mathcal{A}} X) = \bigcap_{X \in \mathcal{A}} (A \cup X)$

ب) $A \cap (\bigcup_{X \in \mathcal{A}} X) = \bigcup_{X \in \mathcal{A}} (A \cap X)$

برهان. اگر $x \in A \cup (\bigcap_{X \in \mathcal{A}} X)$ در این صورت $x \in A$ یا $x \in \bigcap_{X \in \mathcal{A}} X$. پس $x \in A$ یا برای $X \in \mathcal{A}$ داریم $x \in X$ و در نتیجه برای هر $X \in \mathcal{A}$، $x \in A \cup X$ و از آنجا $x \in \cap_{X \in \mathcal{A}} (A \cup X)$. حال اگر $x \in \cap_{X \in \mathcal{A}} (A \cup X)$ در این صورت $x \in A \cup X$ برای هر $X \in \mathcal{A}$ است. پس $x \in A$ یا $x \in X$ برای هر $X \in \mathcal{A}$ است. بنابراین $x \in A$ یا $x \in \bigcap_{X \in \mathcal{A}} X$ و در نتیجه $x \in A \cup (\bigcap_{X \in \mathcal{A}} X)$. اثبات قسمت (ب) مشابه قسمت (الف) است.

۱-۱۱-۱۷ تذکر(مقایسه). به طور کلی نظریه مجموعه‌ها و منطق ریاضی وگزاره‌ها رابطه‌هایی مشابه هم دارند. در تئوری مجموعه‌ها اشیاء همان مجموعه‌ها هستند که با حروف بزرگ A و B و . . .نشان داده می‌شوند. در حساب گزاره‌ها نیز اشیاء همان گزاره‌ها هستند که با حروف p و q و . . .نشان داده می‌شوند. هر خاصیتی مطابق جدول زیر در یک تئوری برای رابطی برقرار باشد در تئوری دیگر برقرار است و بالعکس.

حساب گزاره‌ها	حساب مجموعه‌ها
نماد	نماد
دو مجموعه هم ارز $\cong$	$=$ دو مجموعه مساوی
نقیض $\sim$	/ متمم
عاطف $\wedge$	$\cap$ اشتراک
یای منطقی $\vee$	$\cup$ اجتماع
ترکیب دوشرطی $\Longleftrightarrow$	$\simeq$ هم ارزی دومجموعه
$p \vee \sim p$ گزاره همیشه درست	اتحاد مجموعه‌ای $A \cup A' = M$
$\sim (\Longrightarrow)$	$-$ تفاضل دو مجموعه
$\sim\sim (p) \cong p$ نقیض نقیض $\sim\sim$	$(')$ متمم متمم $(A')' = A$

مثال. رابطه $A - B = A \cap B'$ به چه صورتی در حساب گزاره‌ها نوشته می‌شود؟

$$\begin{cases} A \longrightarrow p \\ B \longrightarrow q \end{cases} \Longrightarrow \sim (p \Longrightarrow q) \cong p \wedge (\sim q)$$

ریاضیدانان بزرگی طی قرون نوزدهم و بیستم کوشش کردند که ثابت کنند نقش منطق در ریاضیات نقش بنیادی، منحصر به فرد است؛ آنها تلاش کردند تا ثابت کنند «کل ریاضیات» چیزی جز «منطق » نمی‌باشد. به عبارت دیگر همهٔ شاخه‌های ریاضیات، نظیر تئوری مجموعه‌ها، تئوری اعداد، تئوری‌های جبری، تئوری توابع و نظایر اینها را می‌توان از منطق و اصول موضوعه آن نتیجه گیری کرد.

در این رابطه از برتراندراسل ریاضیدان و فیلسوف انگلیسی، آلفردوایتهد ریاضیدان وگاتفردفرگ ریاضیدان و منطقی آلمانی می‌توان نام برد. لکن تلاشهای این دانشمندان طی بیش از ۳۰ سال متوالی به انجام نرسید:

گر چه منجر به کاوش‌ها و فراوانی در حوزه ریاضیات گردید. از جمله می‌توان از آثار برتراندراسل و وایتهد که در سه مجله تحت عنوان « اصول طبیعی فلسفه ریاضیات» چاپ دانشگاه کمبریج نام برد.

تمرین دوره‌ای فصل یک

۱) گزاره‌های زیر را با نمادهای منطقی بنویسید.

الف) حد تابع f وقتی x به a میل کند برابر L است. (تعریف حد)

ب) حد تابع f وقتی x به a میل کند برابر L نیست.

ج) تابع f در نقطه a حد دارد.

د) تابع f در نقطه a حد ندارد.

۲) فرض کنیم $p_۱$، $p_۲$، $p_۳$، $p_۴$ و q گزاره منطقی (حکم منطقی) باشند. همچنین فرض کنیم احکام

$$p_۱ \Longrightarrow p_۲$$

$$p_۲ \Longrightarrow p_۳$$

$$p_۳ \Longrightarrow p_۴$$

$$p_۴ \Longrightarrow p_۱$$

را ثابت کرده‌ایم. ثابت کنید گزاره‌های دوشرطی $p_۲ \Longleftrightarrow p_۱$، $p_۳ \Longleftrightarrow p_۱$، $p_۴ \Longleftrightarrow p_۲$، $p_۳ \Longleftrightarrow p_۲$، $p_۴ \longleftarrow p_۲$، $p_۴ \Longleftrightarrow p_۳$ همگی برقرارند.

۳) ثابت کنید دو گزاره منطقی

الف) $\forall N \exists \delta \forall x (۰ < |x - x_۰| < \varepsilon \Longrightarrow (f(x) > N)$

ب) $\forall N (N > N_۰ \Longrightarrow \exists \delta \forall x (۰ < |x - x_۰| < \delta \Longrightarrow (f(x) > N)$ هم‌ارز هستند.

۴) تساویهای مجموعه‌ای زیر را ثابت کنید.

الف) $A \cap (\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i) = \bigcup_{i=1}^{\infty}(A \cap B_i)$

ب) $A \cup (\bigcap_{i=1}^{\infty} B_i) = \bigcap_{i=1}^{\infty}(A \cup B_i)$

۵) نقیض گزاره $p \Longrightarrow q$ را محاسبه کنید.

۶) تعریف مفهوم حد با نمادهای منطقی را یادآوری می‌کنیم:

گوئیم حد تابع f در نقطه a برابر L است و می‌نویسیم $\lim_{x \longrightarrow a} f(x) = L$ هرگاه f درفرمول منطقی زیر صدق کند

$$\forall \varepsilon \exists \delta \forall x (0 < |x - a| < \delta \Longrightarrow |f(x) - L| < \varepsilon)$$

اکنون این عبارات فارسی را به زبان منطقی ترجمه کنید.

الف) حد تابع f در a برابر L نیست.

ب) تابع f در a حد ندارد.

ج) هرگاه f در a حد داشته باشد در فرمول زیر صدق می‌کند.

$$\forall \varepsilon \exists \delta \forall x_1 \forall x_2 (|x_1 - x_2| < \delta \Longrightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon)$$

فصل دوم

رابطه

مقدمه

در این فصل ابتدا به تعریف زوج مرتب و حاصل ضرب دکارتی دو مجموعه می‌پردازیم. سپس یک رابطه به عنوان مجموعه‌ای از زوج مرتبها و زیر مجموعه‌ای از حاصل ضرب دکارتی دو مجموعه تعریف می‌شود. انواع خاص رابطه‌ها، بخصوص روابط هم ارزی و روابط ترتیب جزیی مورد مطالعه قرار می‌گیرند. ارتباط بین روابط هم ارزی و افرازهای روی یک مجموعه، مورد بحث قرار خواهند گرفت.

۲-۱ حاصل ضرب دکارتی مجموعه‌ها

تا کنون اعمال متفاوتی همچون اجتماع، اشتراک، تفاضل و متمم گیری را بر روی مجموعه‌ها تعریف کرده‌ایم. حال می‌خواهیم عمل ضرب را بر روی مجموعه‌ها تعریف کنیم. ایده اولیه تعریف ضرب مجموعه‌ها برای نمایش مختصات نقاط در فضای چند بعدی بوده است.

۲-۱-۱ تعریف. فرض کنید دو عنصر a و b داده شده است. در این صورت می‌توانیم عنصر جدید(a,b) که آن را زوج مرتب[1] a و b می‌نامیم، تشکیل دهیم.

صفت مرتب برای تاکید بر روی ترتیب ظاهر شدن دو عنصر a و b در پرانتز است. بنابراین زوج مرتب (a,b) و زوج مرتب (b,a) در حالت کلی دو عنصر متفاوت هستند.

همچنین دقت کنید که زوج مرتب (a,b) با $\{a,b\}$ متفاوت است، زیرا $\{a,b\}=\{b,a\}$. امّا در حالت کلی $(a,b)\neq(b,a)$.

سوال. آیا شرایطی وجود دارد که $(a,b)=(b,a)$؟

اگر بخواهیم برای زوج مرتب (a,b) یک تعریف دقیق تر ارائه دهیم، می‌توانیم این کار را با استفاده از مجموعه‌ها انجام دهیم.

۲-۱-۲ نکته. زوج مرتب (a,b) را می‌توان به صورت $\{\{a\},\{a,b\}\}$ تعریف کرد.

۲-۱-۳ تمرین.

الف) نشان دهید تعریف فوق از زوج مرتب، همان انتظاری که از ترتیب مؤلفه‌ها می‌رود را برآورده می‌کند. به عبارت دیگر

$$(a,b)=(c,d)\Longleftrightarrow a=c\wedge b=d$$

ب) اگر $(x,۲)=(-۱,y)$، مقادیر x و y را بیابید.

ج) نشان دهید $(a,a)=\{\{a\}\}$.

د) اگر $(x+۲y,۳x-y)=(-۱,۴)$، مقادیر x و y را بیابید.

بعد از تعریف زوج مرتب آماده‌ایم تا حاصل ضرب دکارتی[2] دو مجموعه را تعریف کنیم.

1) Ordered Pair 2) Cartesian Product

۲-۱-۴ تعریف. فرض کنید A و B دو مجموعه دلخواه باشند. در این صورت حاصل ضرب دکارتی A و B که با نماد $A \times B$ نمایش داده می‌شود را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$A \times B = \{(a,b) | a \in A \wedge b \in B\}$$

۲-۱-۵ مثال. فرض کنید $A = \{a,b\}$ و $B = \{۲,۴,۶\}$. در این صورت

$$A \times B = \{(a,۲),(a,۴),(a,۶),(b,۲),(b,۴),(b,۶)\}$$

و

$$B \times A = \{(۲,a),(۴,a),(۶,a),(۲,b),(۴,b),(۶,b)\}$$

با توجه به مثال فوق، بدیهی است که در حالت کلی $A \times B \neq B \times A$.

۲-۱-۶ تمرین. برای مجموعه $A = \{a,b,c\}$، حاصل ضرب دکارتی $A \times A$ را بیابید.

همانطورکه در مثال ۴ـ۱ـ۵ ملاحظه کردید، حاصل ضرب دکارتی مجموعه‌ها در حالت کلی خاصیت جابجایی ندارد. در تمرین فوق یکی از شرایط جابجایی ضرب دکارتی را بررسی کردیم. یعنی اگر $A = B$ آنگاه $A \times B = B \times A$. در مثال زیر یکی دیگر از شرایط جابجایی حاصل ضرب دکارتی را ملاحظه می کنیم.

۲-۱-۷ مثال. فرض کنید A یک مجموعه دلخواه باشد. ادعا می‌کنیم $A \times \varphi = \varphi \times A = \varphi$. فرض کنید $A \times \varphi \neq \varphi$. می‌دانیم که حاصل ضرب $A \times \varphi$، مجموعه تمام زوج مرتب‌های (a,b) است به طوری که $a \in A$ و $b \in \varphi$. امّا مجموعه تهی هیچ عضوی ندارد و $b \in \varphi$ یک تناقض است. بنابراین $A \times \varphi = \varphi$. به همین ترتیب می‌توان نشان داد که $var\times = \varphi$. پس در این حالت نیز ضرب دکارتی مجموعه‌ها جابجا می‌شود. بنابراین می‌توان نکته زیر را اثبات کرد.

۲-۱-۸ نکته. فرض کنید A و B دو مجموعه ناتهی باشند. در این صورت اگر $A \times B = B \times A$ آنگاه $A = B$.

حال می‌خواهیم ارتباط عمل جدید تعریف شده بر روی مجموعه‌ها را با اعمال قبلی بررسی کنیم. قضیه زیر نشان می‌دهد که عمل ضرب دکارتی نسبت به اعمال اجتماع و اشتراک توزیع پذیر است.

۲-۱-۹ قضیه. فرض کنید A و B و C سه مجموعه دلخواه باشند. در این صورت:

الف) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$

ب) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$

اثبات. الف) با عضوگیری مجموعه‌ها می‌توان تساوی را اثبات کرد.

$(a, x) \in A \times (B \cup C)$

$\iff (a \in A) \wedge (x \in B \cup C)$ تعریف حاصل ضرب مجموعه‌ها

$\iff (a \in A) \wedge (x \in B \vee x \in C)$ تعریف اجتماع

$\iff [(a \in A) \wedge (x \in B)] \vee [(a \in A) \wedge (x \in C)]$ توزیع پذیری $\wedge$ نسبت به $\vee$

$\iff (a, x) \in A \times B \vee (a, x) \in A \times C$ تعریف حاصل ضرب مجموعه‌ها

$\iff (a, x) \in (A \times B) \cup (A \times C)$ تعریف اجتماع

به طریق مشابه می‌توان قسمت (ب) را اثبات کرد. □

۲-۱-۱۰ تمرین. قسمت (ب) قضیه ۴ـ۱ـ۹ را اثبات کنید.

در قضیه زیر ارتباط ضرب دکارتی و تفاضل مجموعه‌ها را بررسی می‌کنیم و نشان می‌دهیم که ضرب دکارتی مجموعه‌ها نسبت به تفاضل مجموعه‌ها توزیع پذیر است.

۲-۱-۱۱ قضیه. فرض کنید A و B و C سه مجموعه دلخواه باشند. در این صورت:

$$A \times (B - C) = (A \times B) - (A \times C)$$

اثبات. طبق روال معمول، اثبات تساوی دو مجموعه از طریق عضوگیری بررسی می‌شود.

$(a,x) \in A \times (B-C)$

$\Longleftrightarrow (a \in A) \wedge (x \in B-C)$ تعریف حاصل ضرب مجموعه‌ها

$\Longleftrightarrow (a \in A) \wedge (x \in B \wedge x \notin C)$ تعریف تفاضل

$\Longleftrightarrow [(a \in A) \wedge (x \in B)] \wedge [(a \in A) \wedge (x \notin C)]$ خاصیت خودتوانی $\wedge$

$\Longleftrightarrow (a,x) \in A \times B \wedge (a,x) \notin A \times C$ تعریف حاصل ضرب مجموعه‌ها

$\Longleftrightarrow (a,x) \in (A \times B) - (A \times C)$ تعریف اجتماع

بنابراین تساوی دو مجموعه برقرار است. □

۲-۱-۱۲ تمرین. فرض کنید A و B و C و D مجموعه‌های دلخواه باشند.

الف) نشان دهید که اگر $A \times B = \varphi$ آنگاه $A = \varphi$ یا $B = \varphi$.

ب) اگر $A \subseteq B$ نشان دهید $A \times C \subseteq B \times C$.

ج) نشان دهید

$$(A \times C) \cap (B \times D) = (AcapB) \times (C \cap D)$$

د) اگر $A \times C = B \times C$ و $C \neq \varphi$، آنگاه $A = B$

ه) اگر $A \cap B = \varphi$ آنگاه $(A \times C) \cap (B \times D) = \varphi$.

و) اگر مجموعه‌های A و B و C و D ناتهی باشند، نشان دهید $A \times B = C \times D$ اگر و تنها اگر $B = D$ و $A = C$.

ز) نشان دهید

$$(A \times B) - (C \times D) = ((A-C) \times B) \cup (A \times (B-D))$$

همانطور که در تمرین ۴ـ۱ـ۱۲ ملاحظه شد، خاصیتهای جالبی در مورد ارتباط ضرب دکارتی با اعمال تعریف شده قبلی وجود دارد. مثلاً ضرب دکارتی نسبت به اجتماع، اشتراک و تفاضل مجموعه‌ها توزیع پذیر است. آیا عکس این مطلب نیز برقرار است؟ یعنی اعمال اجتماع، اشتراک و تفاضل نسبت به ضرب دکارتی مجموعه‌ها توزیع پذیر هستند یا خیر؟

۲-۱-۱۳ مثال. فرض کنید A و B و C سه مجموعه دلخواه باشند. در این صورت در حالت کلی عمل اجتماع نسبت به ضرب دکارتی مجموعه‌ها توزیع پذیر نیست. یعنی در حالت کلی

$$A \cup (B \times C) \neq (A \cup B) \times (A \cup C)$$

برای اثبات این مطلب کافی است فقط سه مجموعه دلخواه مثال بزنیم که نا مساوی فوق را نشان دهند. برای مثال مجموعه‌های $A = \{۲\}$، $B = \{a, b\}$ و $C = \{c\}$ را در نظر بگیرید. در این صورت:

$$A \cup (B \times C) = \{۲\} \cup \{(a, c), (b, c)\} = \{۲, (a, c), (b, c)\}$$

از طرفی

$$(A \cup B) \times (A \cup C) = \{۲, a, b\} \times \{۲, c\} = \{(۲, ۲), (۲, c), (a, ۲), (a, c), (b, ۲), (b, c)\}$$

که بوضوح مساوی نیستند.

۲-۱-۱۴ تمرین. نشان دهید که در حالت کلی اعمال اشتراک و تفاضل نسبت به ضرب دکارتی مجموعه‌ها توزیع پذیر نیستند.

علاوه بر روابط فوق، روابط دیگری نیز وجود دارند که بررسی صحت آنها به دقت و تعمق بیشتری نیاز دارد. به تمرین زیر توجه کنید.

۲-۱-۱۵ تمرین. فرض کنید A و B و C و D مجموعه‌های دلخواه باشند. روابط زیر را اثبات یا رد کنید.

الف) $(A \times B) \cup (C \times D) = (A \cup C) \times (B \cup D)$

ب) $A \subseteq C \wedge B \subseteq D \Longleftrightarrow A \times B \subseteq C \times D$

شاید تاکنون شما هم به رابطه بین تعداد اعضای $A \times B$ و تعداد اعضای A و تعداد اعضای B در حالتی که A و B دو مجموعه متناهی باشند، فکر کرده باشید. فرض کنید A یک مجموعه m عضوی و B یک مجموعه n عضوی باشند. در این صورت طبق اصل ضربی تعداد زوجهای مرتب (a,b) که $a \in A$ و $b \in B$ برابر با mn است.

همچنین ممکن است ارتباط بین مجموعه توانی $A \times B$ با مجموعه توانی A و مجموعه توانی B برای شما هم سوال باشد. آیا می‌توان ترتیب دو عمل ضرب دکارتی و محاسبه مجموعه توانی را جابجا کرد؟ این ارتباط در مثال زیر بررسی می‌شود.

۲-۱-۱۶ مثال. می‌خواهیم ببینیم آیا ارتباطی بین دو مجموعه $P(A \times B)$ و $P(A) \times P(B)$ برقرار است یا نه.

ابتدا به یافتن تعداد اعضای این دو مجموعه در حالت متناهی می‌پردازیم. فرض کنید A یک مجموعه m عضوی و B یک مجموعه n عضوی باشند. در این صورت $|A \times B| = mn$ و در نتیجه $|P(A \times B)| = ۲^{mn}$. از طرفی $|P(A)| = ۲^m$ و $|P(B)| = ۲^n$ و بنابراین $|P(A) \times P(B)| = ۲^m \times ۲^n = ۲^{m+n}$. تعداد اعضای این دو مجموعه در حالت کلی متفاوت است (فقط در یک حالت مساوی هستند. کدام حالت؟)

اگر $m = n = ۱$ آنگاه تعداد اعضای $P(A \times B)$ کمتر از $P(A) \times P(B)$ است و در سایر حالات (بجز حالت تساوی آنها) این رابطه برعکس است. بنابراین دو مجموعه نمی‌توانند مساوی باشند. آیا امکان دارد که در بعضی موارد یک رابطه شمول بین این دو مجموعه یافت؟

در حالت کلی جواب منفی است، زیرا ماهیت عناصر این دو مجموعه متفاوت است. برای واضح شدن مطلب دو مجموعه $A = \{x, y\}$ و $B = \{۵\}$ را در نظر بگیرید. در این صورت $A \times B = \{(x, ۵), (y, ۵)\}$ و در نتیجه $P(A \times B) = \{\varphi, \{(x, ۵)\}, \{(y, ۵)\}, \{(x, ۵), (y, ۵)\}\}$.

از طرفی $P(A) = \{\varphi, \{x\}, \{y\}, \{x, y\}\}$، $P(B) = \{\varphi, \{۵\}\}$ و بنابراین

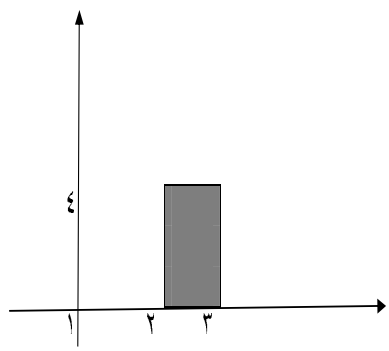
$$P(A) \times P(B) = \{(\varphi, \varphi), (\varphi, \{۵\}), (\{x\}, \varphi), (\{x\}, \{۵\}), (\{y\}, \varphi(, (\{y\}, \{۵\}), (\{x, y\}, \varphi), (\{x, y\}, \{۵\})\}$$

در نتیجه ملاحظه می‌شود ماهیت عناصر این دو مجموعه متفاوت است. بنابراین هیچ ارتباطی بین این دو مجموعه وجود ندارد و $P(A \times B)$ و $P(A) \times P(B)$ دو مجموعه کاملاً متفاوت هستند.

همانطورکه در مقدمه این بخش ذکر شد، حاصل ضرب دکارتی مجموعه‌ها تفسیر هندسی دارد. در بحث هندسه تحلیلی اگر مجموعه‌های A و B هر دو مساوی مجموعه اعداد حقیقی یعنی $\mathbb{R}$ باشند، آنگاه مجموعه $A \times B$ یعنی $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ نشان دهنده نقاط صفحه است.

اگر A و B فواصل بسته زیر مجموعه $\mathbb{R}$ باشند، آنگاه $A \times B$ یک مستطیل در صفحه خواهد بود. به مثال زیر توجه کنید.

۲-۱-۱۷ مثال. فرض کنید $A = [۲, ۳]$ و $B = [۱, ۴]$ فواصل بسته زیر مجموعه $\mathbb{R}$ باشند. در این صورت مجموعه $A \times B$ به صورت زیر نشان داده می‌شود.



شکل ۴-۱

هر یک از اشکال هندسی که زیر مجموعه‌ای از نقاط صفحه می‌باشند، در حقیقت زیر مجموعه‌ای از حاصل ضرب دکارتی $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ هستند. به تمرین زیر توجه کنید.

۲-۱-۱۸ تمرین. هر یک از مجموعه‌های زیر به عنوان زیر مجموعه‌ای از نقاط صفحه $\mathbb{R}$ توصیف و ترسیم کنید.

الف) $\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} | x = y\}$

ب) $\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} | x^۲ > y\}$

ج) $\{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} | x^۲ + y^۲ \leq ۱\}$

۲-۲ رابطه[3]

مفهوم رابطه در حقیقت برگرفته از مفهوم روزمره آن است. وقتی در مورد رابطه بین دو انسان صحبت می‌کنیم، مثلاً می‌گوییم حسین فرزند علی است، در حقیقت زوج مرتب (علی ، حسین) را مدنظر قرار داده‌ایم، که مؤلفه اول آن فرزند مؤلفه دوم آن است و بدیهی است که تعویض این دو مؤلفه با یکدیگر معنای دیگری دارد. به همین ترتیب وقتی می‌گوییم $y = ۲x$ در واقع زوج مرتبهایی به فرم $(x, ۲x)$ را در نظر گرفته‌ایم. با این مقدمه می‌توان یک تعریف دقیق و اصولی برای رابطه ارایه داد.

۲-۲-۱ تعریف. دو مجموعه دلخواه A و B را در نظر بگیرید. رابطه R از A به B یک زیر مجموعه از حاصل ضرب دکارتی $A \times B$ است. مرسوم است که $(a,b) \in R$ را با نماد aRb نشان می‌دهیم و می‌خوانیم a در رابطه R با b است.

۲-۲-۲ مثال. فرض کنید دو مجموعه از اسامی چند پدر و فرزندان آنها را به صورت زیر داشته باشیم. اگر $A =$ {محمد، احمد، علی} مجموعه پدران و $B =$ {رضا، فرید، ایمان، حسین} مجموعه فرزندان باشد. می‌توانیم رابطه R را رابطه پدر بودن تعریف می‌کنیم و $(a,b) \in R$ بدین معنا باشد که a پدر b است. رابطه زیر را در نظر بگیرید:

$R =$ {(رضا، محمد)، (فرید، احمد)، (ایمان، احمد)، (حسین، علی)}

بدیهی است که R یک زیر مجموعه از $A \times B$ است و سایر عناصر $A \times B$ در رابطه پدر بودن قرار ندارند.

۲-۲-۳ مثال. هر یک از مجموعه‌های تمرین ۴ـ۱ـ۱۸ یک زیر مجموعه $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ و در نتیجه یک رابطه از $\mathbb{R}$ به$\mathbb{R}$ هستند.

3) Relation

۲-۲-۴ تعریف. فرض کنید A و B دو مجموعه دلخواه و نه لزوماً متمایز باشند. همچنین فرض کنید R یک رابطه از A به B باشد. در این صورت وارون[4] رابطه R که آن را با R^{-1} نمایش می‌دهیم، یک رابطه از B به A است و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$R^{-1} = \{(b,a)|(a,b) \in R\}$$

به عبارت دیگر $(a,b) \in R \Longleftrightarrow (b,a) \in R^{-1}$.

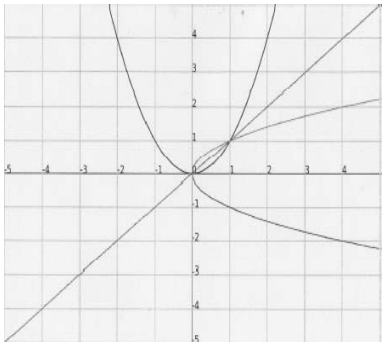
۲-۲-۵ مثال. رابطه پدر بودن در مثال ۴ـ۲ـ۲ را در نظر بگیرید. وارون این رابطه به صورت رابطه پسر بودن تعریف می‌شود. بنابراین اگر علی پدر حسین باشد آنگاه حسین پسر علی است. رابطه R^{-1} یعنی رابطه پسر بودن به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$R^{-1} = \{(\text{محمد، رضا}), (\text{احمد، فرید}), (\text{احمد، ایمان}), (\text{علی، حسین})\}$$

۲-۲-۶ مثال. **الف)** رابطه $R = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} | x^2 = y\}$ را روی مجموعه اعداد حقیقی در نظر بگیرید. برای محاسبه ضابطه R^{-1} به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$(x,y) \in R^{-1} \Longleftrightarrow (y,x) \in R \Longleftrightarrow y^2 = x \Longleftrightarrow y = \pm\sqrt{x}$$

می‌توان هر دو نمودار را در یک صفحه مختصات رسم کرد.



شکل ۴ـ۲

به نظر می‌رسد نمودارهای R و R^{-1} نسبت به خط $y = x$ قرینه‌اند!

4) Inverse

۷-۲-۲ مثال. رابطه $R = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} | y = ۲x + ۱\}$ را در نظر بگیرید. ضابطه $R^{-۱}$ به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$(x, y) \in R^{-۱} \Longleftrightarrow (y, x) \in R \Longleftrightarrow x = ۲y + ۱ \Longleftrightarrow y = \frac{x - ۱}{۲}$$

این دو خط را نیز در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم.

شکل ۴ـ۳

۸-۲-۲ تمرین.

الف) فرض کنید $A = \{a, b, c\}$ و $B = \{d\}$. کلیه رابطه‌های از A به B را بنویسید.

ب) معکوس رابطه‌های فوق را بنویسید.

۹-۲-۲ تمرین.

الف) اگر $|A| = m$ و $|B| = n$، آنگاه تعداد رابطه‌های A به B چندتاست؟

ب) تعداد رابطه‌های روی A چندتاست؟

۲-۲-۱۰ نکته. دقت کنید که طبق تعریف، هر زیر مجموعه از حاصل ضرب دکارتی $A \times B$ یک رابطه از A به B است و از آنجا که تهی زیر مجموعه هر مجموعه‌ای است، پس تهی یک رابطه از هر مجموعه دلخواه A به هر مجموعه دلخواهB است.

برای هر رابطه دلخواه می‌توان دامنه[5] رابطه و تصویر[6] رابطه را به صورت زیر تعریف کرد.

۲-۲-۱۱ تعریف. فرض کنید R یک رابطه از A به B باشد. در این صورت دامنه رابطه R که آن را با نماد $\mathrm{Dom}(R)$ نمایش می‌دهیم، عبارت است از مجموعه تمام عناصر $a \in A$ بطوریکه عنصر $b \in B$ وجود داشته باشد کهaRb. به عبارت دیگر

$$\mathrm{Dom}(R) = \{a \in A | aRb, \exists b \in B\}$$

به همین ترتیب تصویر رابطه R که آن را با نماد $\Im(R)$ نمایش می‌دهیم، عبارت است از مجموعه تمام عناصر $b \in B$ به طوری که عنصر$a \in A$ وجود داشته باشد که aRb. به عبارت دیگر

$$\Im(R) = \{b \in B | aRb, \exists a \in A\}$$

۲-۲-۱۲ مثال. فرض کنید $A = \{x \in \mathbb{N} | ۱ \leq x \leq ۱۰\}$ زیر مجموعه‌ای از اعداد طبیعی باشد. رابطهR را روی A به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$R = \{(x, y) | x, y \in A, x \neq y, \text{مضربی از } x \text{ باشد } y\}$$

در این صورت عناصر رابطه R به صورت زیر می‌باشند:

$$R = \{(۲, ۴), (۲, ۶), (۲, ۸), (۲, ۱۰), (۳, ۶), (۳, ۹), (۴, ۸), (۵, ۱۰)\}$$

و بنابراین

$$\Im(R) = \{۴, ۶, ۸, ۹, ۱۰\} \quad \text{و} \quad \mathrm{Dom}(R) = \{۲, ۳, ۴, ۵\}$$

5) Domain 6) Image

۱۳-۲-۲ تمرین. رابطه R را روی مجموعه مجموعه اعداد طبیعی به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$R = \{(x, y) | y = ۲x + ۳, \quad x \leq ۵\}$$

الف) اعضای رابطه R را مشخص کنید.

ب) دامنه و تصویر R را بیابید.

ج) حاصل ضرب دکارتی$\mathrm{Dom}(R) \times \Im(R)$ را بیابید.

د) رابطه$R^{-۱}$ را بیابید.

ه) دامنه و تصویر $R^{-۱}$ را بیابید.

۱۴-۲-۲ تمرین. فرض کنید R و S دو رابطه از A بهB باشند. نشان دهید:

الف) $\mathrm{Dom}(R) = \Im(R^{-۱})$

ب) $\Im(R) = \mathrm{Dom}(R^{-۱})$

ج) $(R^{-۱})^{-۱} = R$

د) $(R \cup S)^{-۱} = R^{-۱} \cup S^{-۱}$

ه) $(R \cap S)^{-۱} = R^{-۱} \cap S^{-۱}$

۱۵-۲-۲ تمرین. آیا می‌توان رابطه R را به صورت حاصل ضرب دکارتی دامنهR در تصویر R نوشت؟ چرا؟

۱۶-۲-۲ تمرین. دامنه و تصویر هر یک از رابطه‌های زیر، تعریف شده روی R (مجموعه اعداد حقیقی) را بیابید.

الف)$R_۱ = \{(x, y) | y = \dfrac{x - ۱}{x + ۲}\}$

ب)$R_۲ = \{(x, y) | x = y^۲\}$

ج)$R_۳ = \{(x, y) | x^۲ + y^۲ = ۴\}$

۲-۲-۱۷ تعریف. فرض کنید A و B دو مجموعه و R یک رابطه از A به B باشد. اگر $X \subseteq A$، آنگاه تحدید[7] R به مجموعه X که با نماد $R|_x$ نمایش داده می‌شود، زیر مجموعه‌ای از رابطه R است و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$R|_x = \{(x, y) \in R | x \in X\}$$

به عبارت دیگر $R|_x$ مجموعه همه زوج مرتب‌هایی از R است که مؤلفه اول آنها در X قرار دارد.

۲-۲-۱۸ مثال. فرض کنید R یک رابطه روی $\mathbb{N}$ (مجموعه اعداد طبیعی) باشد، که به صورت زیر تعریف شده است:

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} | y = ۲x\}$$

اگر $X = \{۲, ۳, ۴, ۵, ۶\}$ آنگاه $R|_x = \{(۲, ۴), (۳, ۶), (۴, ۸), (۵, ۱۰), (۶, ۱۲)\}$.

۲-۲-۱۹ مثال. رابطه R روی اعداد صحیح به صورت زیر تعریف شده است:

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} | x - y = ۳k, \quad \exists k \in \mathbb{Z}\}$$

اگر $X = \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵\}$، آنگاه $R|_x = \{(۱, ۱), (۲, ۲), (۳, ۳), (۴, ۴), (۵, ۵), (۱, ۴), (۴, ۱), (۲, ۵), (۵, ۲)\}$.

۲-۲-۲۰ قضیه. فرض کنید R یک رابطه از A به B و $X \subseteq A$ باشد. در این صورت

$$\mathrm{Dom}(R|_x) = \mathrm{Dom}(R) \cap X$$

اثبات. اثبات توسط عضوگیری مجموعه‌ها انجام می‌شود.

$$\begin{aligned} x \in \mathrm{Dom}(R|_x) &\iff \exists y \in B, (x, y) \in R|_x \\ &\iff \exists y \in B, (x, y) \in R \wedge x \in X \\ &\iff x \in \mathrm{Dom}(R) \wedge x \in X \\ &\iff x \in \mathrm{Dom}(R) \cap X. \bullet \end{aligned}$$

7) Restriction

۲-۲-۲۱ تمرین. فرض کنید R یک رابطه از A به B و X و Y دو زیر مجموعه A باشند. نشان دهید:

الف) $R|_{X\cup Y} = R|_X \cup R|_Y$

ب) $R|_{X\cap Y} = R|_X \cap R|_Y$

ج) $R|_{\varphi} = \varphi$

د) $\varphi|_X = \varphi$

۲-۲-۲۲ تعریف. فرض کنید R یک رابطه از A به B و $X \subseteq A$ باشد. در این صورت تصویر مجموعه X تحت رابطه R که آن را با نماد $R[X]$ نمایش می‌دهیم، به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$R[X] = \{y \in B | \exists x \in X, (x, y) \in R\}$$

به عبارت دیگر برای تشکیل مجموعه $R[X]$، زوج مرتبهایی از R را که مؤلفه اول آنها در X است را انتخاب کرده و مؤلفه دوم آنها را در مجموعه $R[X]$ قرار می‌دهیم.

۲-۲-۲۳ مثال. رابطه R را روی $\mathbb{Z}$ به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} | y = ۳x - ۱\}$$

اگر $X = \{x \in \mathbb{Z} | ۱ \leq x \leq ۱۰\}$ آنگاه $R[X] = \{۲, ۵, ۸, ۱۱, ۱۴, ۱۷, ۲۰, ۲۳, ۲۶, ۲۹\}$.

۲-۲-۲۴ تمرین. فرض کنید R یک رابطه از A به B و X و Y دو زیر مجموعه A باشند. نشان دهید:

الف) $R[X] = \Im(R|_X)$

ب) $R[X \cup Y] = R[X] \cup R[Y]$

ج) $R[X \cap Y] \subseteq R[X] \cap R[X]$

د) $R[X - Y] \supseteq R[X] - R[X]$

ه) $X \subseteq Y \Longrightarrow R[X] \subseteq R[Y]$

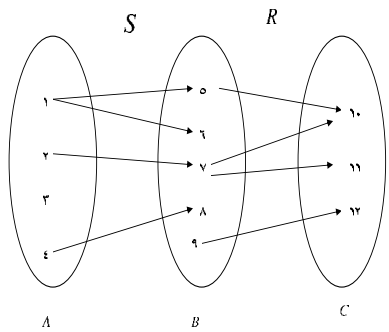
و) $\varphi[X] = \varphi$

ز) $R[\varphi] = \varphi$

۲-۲-۲۵ تمرین. با یک مثال نقض نشان دهید که تساوی در قسمتهای ج و د تمرین ۴ـ۲ـ۲۴ برقرار نیست.

همانطور که ملاحظه کردید، یک رابطه زیر مجموعه‌ای از حاصل ضرب دکارتی دو مجموعه است و در نتیجه هر رابطه یک مجموعه است. پس اعمالی که بر روی مجموعه‌ها تعریف شده برای رابطه‌ها هم تعریف شده است. در تمرین ها اجتماع، اشتراک و تفاضل دو رابطه را دیدید. اکنون می‌خواهیم یک عمل جدید را بر روی مجموعه‌ها تعریف کنیم. با یک مثال بحث را شروع می‌کنیم.

فرض کنید A و B و C سه مجموعه از شهرهای متفاوت باشند. همچنین فرض کنید رابطه R نشان دهنده راههای ارتباطی موجود بین شهرهای مجموعه B و مجموعه C بوده و رابطه S راههای ارتباطی موجود بین شهرهای مجموعه A و مجموعه B را نشان دهد. به شکل زیر توجه کنید.



شکل ۴ـ۴

حال اگر مسافری بخواهد از یکی از شهرهای مجموعه A به یکی از شهرهای مجموعه C سفر کند، چه مسیرهایی را می‌تواند انتخاب کند؟

این مسافر می‌تواند از شهر ۱ به شهر ۵ و سپس به شهر ۱۰ برود. توجه کنید که اگر از شهر ۱ به شهر

۶ برود، امکان ادامه سفر برای او وجود ندارد. همچنین اگر از شهر ۴ به شهر ۸ برود، سفر او متوقف خواهد شد. اگر سفر خود را از شهر ۲ شروع کند و به شهر ۷ برود، در ادامه می‌تواند دو انتخاب شهر ۱۰ و شهر ۱۱ را داشته باشد. بنابراین کلیه مسیرهای ممکن به شرح زیر می‌باشند:

$$۱ - - - \longrightarrow ۵ - - - \longrightarrow ۱۰$$

$$۲ - - - \longrightarrow ۷ - - - \longrightarrow ۱۰$$

$$۲ - - - \longrightarrow ۷ - - - \longrightarrow ۱۱$$

در نتیجه این مسافر می‌تواند برای سفر خود زوج مرتب $(۱, ۱۰)$، $(۲, ۱۰)$ و یا $(۲, ۱۱)$ را انتخاب کند. به عبارت دیگر، برای انتقال از مجموعه A به مجموعه C باید یکی از عناصر مجموعه B نقش واسطه را ایفا کند تا از طریق آن بتوان این انتقال را انجام داد. حال به تعریف زیر توجه کنید.

۲-۲-۲۶ تعریف. فرض کنید $R \subseteq R \times C$ و $S \subseteq A \times B$ دو رابطه باشند. در این صورت ترکیب[8] رابطه R با S که آن را با نماد RoS (بخوانید R اُ S) نمایش می‌دهیم، به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$RoS = \{(x, z) | \exists y \in B, (x, y) \in S \wedge (y, z) \in R\}$$

۲-۲-۲۷ مثال. فرض کنید

$$R = \{(۱, ۲), (۲, ۴), (۳, ۶), (۴, ۸)\} \text{ و } S = \{(a, ۲), (b, ۳), (b, ۴), (c, ۲), (a, ۵)\}$$

در این صورت برای تشکیل رابطه RoS ابتدا از زوج مرتب‌های S شروع می‌کنیم. اولین زوج مرتب $(a, ۲)$ است. اگر مؤلفه دوم این زوج مرتب، یعنی ۲، مؤلفه اول زوج مرتبی در R باشد آنگاه می‌توان از طریق این عضو، زوج مرتبی در RoS را تشکیل داد. از آنجا که $(۲, ۴) \in R$، پس می‌توان زوج مرتب $(a, ۴)$ را به عنوان عضوی از RoS در نظر گرفت. به همین ترتیب $(c, ۲) \in S$ و $(۲, ۴) \in R$ نتیجه می‌دهد $(c, ۴) \in RoS$. سایر اعضای رابطه RoS به صورت زیر محاسبه می‌شوند.

$$(b, ۳) \in S \wedge (۳, ۶) \in R \Longrightarrow (b, ۶) \in RoS$$

8) Composition

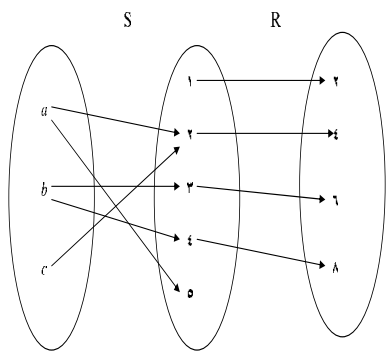
$$(b,۴) \in S \wedge (۴,۸) \in R \Longrightarrow (b,۸) \in RoS$$

بنابراین

$$RoS = \{(a,۴),(c,۴),(b,۶),(b,۸)\}$$

شکل۴ـ۵ نیز می‌تواند در تشکیل رابطه RoS کمک کند.

در بعضی موارد تعداد عناصر روابط R و S زیاد است. حتی ممکن است که متناهی هم نباشند. در این حالت روابط را با ضابطه آنها مشخص می‌کنیم و برای تشکیل RoS نیز به صورت ضابطه‌ای عمل می‌کنیم. به مثال زیر توجه کنید.



شکل ۴ـ۵

۲-۲-۲۸ مثال. فرض کنید R و S دو رابطه روی $\mathbb{R}$ باشند، که به صورت زیر تعریف شده‌اند:

$$R = \{(x,y)|y = ۲x\} \qquad \text{و} \qquad S = \{(x,y)|y = x^۲\}$$

رابطه RoS را به صورت زیر می‌یابیم:

$$\begin{aligned} RoS &= \{(x,z)|\exists y,(x,y) \in S \wedge (y,z) \in R\} \\ &= \{(x,z)|\exists y, y = x^۲ \wedge z = ۲y\} \\ &= \{(x,z)|\exists y, z = ۲y = ۲x^۲\} \\ &= \{(x,z)|z = ۲x^۲\} \end{aligned}$$

همچنین می‌توان رابطه SoR را نیز تشکیل داد.

$$\begin{aligned} SoR &= \{(x,z)|\exists y,(x,y)\in R\wedge(y,z)\in S\} \\ &= \{(x,z)|\exists y, y=۲x\wedge z=y^۲\} \\ &= \{(x,z)|\exists y, z=y^۲=(۲x)^۲\} \\ &= \{(x,z)|z=۴x^۲\} \end{aligned}$$

همانطورکه ملاحظه می‌کنید، در حالت کلی $RoS \neq SoR$. یعنی ترکیب روابط خاصیت جابجایی ندارد.

۲-۲-۲۹ تمرین. در هر یک از موارد زیر RoS و SoR را بیابید.

الف) $R=\{(۱,۱),(۱,۲),(a,۳)\}$ و $S=\{(۱,۶),(۳,۱)\}$

ب) $R=\{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}|y=|x|\}$ و $S=\{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}|y=x^۲\}$

ج) $R=\{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}|y=x\}$ و $S=\{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}|y\neq x\}$

۲-۲-۳۰ قضیه. فرض کنید R، S و T سه رابطه باشند. در این صورت

$$(RoS)oT = Ro(SoT)$$

به عبارت دیگر ترکیب روابط خاصیت شرکت پذیری دارد.

اثبات. با استفاده از تعریف ترکیب روابط و عضوگیری، به صورت زیر اثبات می‌شود:

$$\begin{aligned} (x,z)\in(RoS)oT &\Longleftrightarrow \exists y,((x,y)\in T\wedge(y,z)\in RoS) \\ &\Longleftrightarrow \exists y,\exists u((x,y)\in T\wedge(y,u)\in S\wedge(u,z)\in R) \\ &\Longleftrightarrow \exists u,((x,u)\in SoT\wedge(u,z)\in R) \\ &\Longleftrightarrow (x,z)\in Ro(SoT).\bullet \end{aligned}$$

سوال. چه ارتباطی بین دامنه و تصویر رابطه مرکب RoS با دامنه و تصویر روابط R و S وجود دارد؟

۲-۲-۳۱ تمرین. فرض کنید R، S و T سه رابطه و X یک مجموعه باشد. ثابت کنید:

الف) $(RoS)^{-1} = S^{-1}oR^{-1}$

ب) $(RoS)|_X = Ro(S|_X)$

ج) $\begin{cases} R \subseteq R \Longrightarrow RoT \subseteq SoT \\ R \subseteq S \Longrightarrow ToR \subseteq ToS \end{cases}$

د) $(RoS)[X] = R[S[X]]$

ه) $\mathrm{Dom}(RoS) = S^{-1}[\mathrm{Dom}(R)]$

و) $\Im(RoS) = R[\Im(S)]$

۲-۳ رابطه هم ارزی و افراز

در این بخش فقط به بررسی دسته‌ای از روابط می‌پردازیم که بر روی یک مجموعه تعریف شده‌اند. یادآوری می‌شود که R یک رابطه روی مجموعهA است اگر $R \subseteq A \times A$. این رابطه ها در شاخه‌های مختلف ریاضی نقشهای مهمی ایفا می‌کنند.

۲-۳-۱ تعریف. فرض کنید R یک رابطه روی مجموعهA باشد. در این صورت:

الف) رابطه R را روی A بازتابی[9] می‌نامیم اگر برای هر $a \in A$ داشته باشیم $(a,a) \in R$. به عبارت دیگر

$$R \Longleftrightarrow \forall a \in A, aRa \quad \text{بازتابی است.}$$

ب) رابطه R را روی A متقارن[10] می‌نامیم اگر برای هر $a,b \in A$ از $(a,b) \in R$ نتیجه شود $(b,a) \in R$. به عبارت دیگر

$$R \Longleftrightarrow \forall a,b \in A, (aRb \Longleftrightarrow bRa) \quad \text{متقارن است.}$$

ج) رابطه R را روی A انتقالی[11] می‌نامیم اگر برای هر $a,b,c \in A$ اگر $(a,b) \in R$ و $(b,c) \in R$

9) Reflexive 10) Symmetric 11) Transitive

آنگاه $(a,c) \in R$. به عبارت دیگر

$$R \Longleftrightarrow \forall a,b,c \in A(aRb \wedge bRc \Longrightarrow aRc) \quad \text{انتقالی است.}$$

۲-۳-۲ تعریف. فرض کنید R یک رابطه روی مجموعهA باشد. در این صورت R را روی A یک رابطه هم‌ارزی[۱۲] می‌نامیم، هرگاه بازتابی، متقارن و انتقالی باشد.

۲-۳-۳ مثال. مجموعه $A = \{a,b,c,d,e\}$ و روابط زیر بر روی A را در نظر بگیرید:

$$R_1 = \{b,b),(a,b),(b,a),(b,e),(e,b)\}$$

$$R_2 = \{(a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(e,e),(c,e),(e,b)\}$$

$$R_3 = \{(a,c),(c,e),(a,e)\}$$

$$R_4 = \{(a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(e,e)\}$$

رابطه R_1 بازتابی نیست، زیرا به عنوان مثال $(a,a) \notin R_1$. رابطه R_1 متقارن است (بررسی کنید).
این رابطه انتقالی نیست زیرا $(b,a) \in R_1$ و $(a,b) \in R_1$ امّا $(a,a) \notin R_1$.
رابطه R_2 بازتابی است امّا متقارن نیست. زیرا $(c,e) \in R_2$ ولی $(e,c) \notin R_2$. این رابطه انتقالی نیست (بررسی کنید).
رابطه R_3 بازتابی و متقارن نیست ولی انتقالی است.
رابطهR_4 بازتابی، متقارن و انتقالی و در نتیجه یک رابطه هم ارزی است.

۲-۳-۴ تعریف. فرض کنید R یک رابطه روی مجموعه باشد. رابطه I_A را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$I_A = \{(x,x)|x \in A\}$$

رابطه I_A را رابطه همانی[۱۳] بر روی مجموعه A می‌نامیم. در مثال ۴ـ۳ـ۳ رابطه R_4 روی A، رابطه همانی است. بدیهی است که رابطه I_A روی A یک هم ارزی است.

12) Equivalencer relation 13) Identity relation

۲-۳-۵ قضیه. فرض کنید R یک رابطه روی مجموعه A باشد. در این صورت

الف) R بازتابی است اگر و تنها اگر $I_A \subseteq R$.

ب) R متقارن است اگر و تنها اگر $R = R^{-1}$.

ج) R انتقالی است اگر و تنها اگر $RoR \subseteq R$.

اثبات.

الف) ابتدا فرض کنید R بازتابی باشد. نشان می‌دهیم $I_A \subseteq R$. عنصر $(x,x) \in I_A$ را در نظر بگیرید. در این صورت $x \in A$. از آنجا که R بازتابی است، پس $(x,x) \in R$. یعنی $I_A \subseteq R$. از طرفی اگر $I_A \subseteq R$، بدیهی است که برای هر $x \in A$، داریم $(x,x) \in I_A$ و در نتیجه $(x,x) \in R$ برای هر $x \in A$. بنابراین R بازتابی است.

ب) ابتدا فرض کنید متقارن باشد. در این صورت

$$(x,y) \in R \Longleftrightarrow (y,x) \in R \Longleftrightarrow (x,y) \in R^{-1}$$

بنابراین $R = R^{-1}$. از طرفی اگر $R = R^{-1}$ آنگاه

$$(x,y) \in R \Longleftrightarrow (x,y) \in R^{-1} \Longleftrightarrow (y,x) \in R$$

پس R متقارن است.

ج) فرض کنید R انتقالی باشد. در این صورت

$$(x,z) \in RoR \Longrightarrow \exists y, (x,y) \in R \wedge (y,z) \in R \Longrightarrow (x,z) \in R$$

پس $RoR \subseteq R$. برعکس فرض کنید $RoR \subseteq R$. نشان می‌دهیم R انتقالی است.

$$(x,y) \in R \wedge (y,z) \in R \Longrightarrow (x,z) \in RoR \subseteq R \Longrightarrow (x,z) \in R. \bullet$$

۲-۳-۶ تمرین. یک رابطه انتقالی مثال بزنید که $RoR \neq R$.

۲-۳-۷ تمرین.

الف) فرض کنید R و S دو رابطه هم ارزی روی A باشند. نشان دهید $R \cap S$ نیز یک رابطه هم ارزی روی A است. آیا این حکم در مورد $R \cup S$ نیز برقرار است؟ چرا؟

ب) فرض کنید R یک رابطه روی A باشد. نشان دهید رابطه $R \cup R^{-1}$ یک رابطه متقارن است.

ج) نشان دهید $R \cup R^{-1}$ کوچکترین رابطه متقارنی است که R را در بر دارد. یعنی اگر S یک رابطه متقارن باشد که $R \subseteq S$، آنگاه $R \cup R^{-1} \subseteq S$.

د) فرض کنید R یک رابطه روی A باشد. نشان دهید رابطه $R \cap R^{-1}$ یک رابطه متقارن است.

ه) نشان دهید $R \cap R^{-1}$ بزرگترین رابطه متقارنی است که در R وجود دارد. یعنی اگر S یک رابطه متقارن باشد که $R \supseteq S$، آنگاه $R \cap R^{-1} \supseteq S$.

۲-۳-۸ مثال. مجموعه $A = \{a, b, c\}$ را در نظر بگیرید. می‌خواهیم کلیه روابط هم ارزی ممکن بر روی A را بدست آوریم. بدیهی است که هر رابطه هم ارزی روی A باید بازتابی باشد. پس حداقل باید شامل I_A باشد . رابطهR_1 را به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$R_1 = \{(a, a), (b, b), (c, c)\}$$

این رابطه هم متقارن است و هم انتقالی. بنابراین کوچکترین رابطه هم ارزی روی A، رابطه R_1 است. اگر بخواهیم روابط هم ارزی دیگری را بدست آوریم باید عناصر غیر همانی را به I_A اضافه کنیم. اگر عنصر (a, b) را به I_A اضافه کنیم، برای حفظ تقارن رابطه بایستی عنصر (b, a) را نیز به آن اضافه کرد. با افزودن این دو عنصر شرط انتقالی بودن رابطه نیز برقرار می‌ماند. بنابراین رابطه هم ارزی دیگری به صورت زیر بدست می‌آید:

$$R_2 = \{(a, a), (b, b), (c, c), (a, b), (b, a)\}$$

می‌توان نقش عنصر (a, b) را با (a, c) یا (b, c) عوض کرد و روابط هم ارزی جدیدی بدست آورد.

$$R_3 = \{(a, a), (b, b), (c, c), (a, c), (c, a)\}$$

$$R_۴ = \{(a,a),(b,b),(c,c),(b,c),(c,b)\}$$

این بار برای بدست آوردن رابطه هم ارزی جدید باید دو عنصر (a,b) و (a,c) را به I_A اضافه کرد. برای حفظ تقارن باید (b,a) و (c,a) را نیز اضافه کنیم. با وجود دو عنصر(b,a) و (a,c) باید (b,c) را اضافه کنیم تا رابطه انتقالی باشد. در آخر باید (c,b) را نیز برای حفظ تقارن رابطه اضافه کنیم و به این ترتیب رابطه زیر که مساوی $A \times A$ است بدست می‌آید.

$$R_۵ = \{(a,a),(b,b),(c,c),(b,c),(c,b),(a,c),(c,a),(a,b),(b,a)\}$$

با توجه به این که رابطه $R_۵$ مساوی $A \times A$ است، بزرگترین رابطه هم ارزی روی A خواهد بود و کلیه روابط هم ارزی روی A بدست آمده‌اند.

۲-۳-۹ تمرین. مجموعه $A = \{a,b,c\}$ را در نظر بگیرید. مثالی از هر یک روابط زیر روی A ارایه دهید.

الف) R رابطه‌ای بازتابی و متقارن است ولی انتقالی نیست.

ب) R رابطه‌ای متقارن و انتقالی است ولی بازتابی نیست.

ج) R رابطه‌ای بازتابی و انتقالی است ولی متقارن نیست.

د) R بازتابی، متقارن و انتقالی نیست.

در ادامه یک رابطه هم ارزی که کاربردهای زیادی در جبر و نظریه اعداد دارد را معرفی می‌کنیم.

۲-۳-۱۰ تعریف. فرض کنید n یک عدد طبیعی باشد. رابطه $\equiv_n$ را روی $\mathbb{Z}$ به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$x \equiv_n y \iff \exists k \in \mathbb{Z}, (x - y = kn)$$

رابطه $\equiv_n$ را رابطه هم نهشتی[۱۴] به پیمانه[۱۵] n می‌نامیم. در بعضی موارد از نماد $x \equiv y(\mod n)$ نیز استفاده می‌شود.

14) Congruence relation 15) Modulo

توجه کنید که در حالت $n = ۱$ رابطه هم نهشتی به پیمانهn به کل $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ تبدیل خواهد شد و رابطه خاصی را بیان نمی‌کند.

۲-۳-۱۱ قضیه. برای هر عدد طبیعی n، رابطه هم نهشتی به پیمانه n روی $\mathbb{Z}$ یک رابطه هم ارزی است.

اثبات. برای هر $x \in \mathbb{Z}$ بدیهی است که $x - x = - = ۰ \times n$. پس $x \equiv_n x$. یعنی رابطه $\equiv_n$ بازتابی است.

حال فرض کنید $x \equiv_n y$. بنابراین $k \in \mathbb{Z}$ وجود دارد که $x - y = kn$. پس $y - x = (-k)n$. یعنی $y \equiv_n x$ و رابطه $\equiv_n$ متقارن است. برای اثبات انتقالی بودن رابطه $\equiv_n$ فرض کنید $x \equiv_n y$ و $y \equiv_n z$. یعنی عناصر $k, k' \in \mathbb{Z}$ وجود دارند که $x - y = kn$ و $y - z = k'n$. از جمع طرفین دو تساوی اخیر داریم $x - z = (k + k')n$. با قرار دادن نتیجه می‌شود $x \equiv_n z$. بنابراین $\equiv_n$ انتقالی است. •

۲-۳-۱۲ نمادگذاری. برای نمایش یک رابطه هم ارزی روی یک مجموعه معمولاً از نماد " $\sim$ " (بخوانید «تیلدا») استفاده می‌کنیم. به عبارت دیگر اگر R یک هم ارزی و $(x, y) \in R$، آنگاه xRy را با $x \sim y$ نمایش می‌دهیم.

۲-۳-۱۳ تعریف. فرض کنید " $\sim$ " یک رابطه هم ارزی روی مجموعه A باشد و $a, b \in A$. اگر $a \sim b$ آنگاه a را هم ارز b می‌نامیم.

۲-۳-۱۴ تعریف. فرض کنید " $\sim$ " یک رابطه هم ارزی روی مجموعهA باشد. در این صورت برای $a \in A$ کلاس هم‌ارزی[16] a، که آن را با نماد$\bar{a}$ (یا $[a]$) نمایش می‌دهیم، عبارت است از مجموعه همه عناصر A که هم ارز a هستند. به عبارت دیگر $\bar{a} = \{x \in A | x - a\}$.

۲-۳-۱۵ مثال. رابطه هم ارزی زیر را روی مجموعه$A = \{a, b, c, d, e\}$ در نظر بگیرید.

$$R = \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (e, e), (a, b), (b, a), (c, d), (d, c)\}$$

16) Equivalence class

کلاسهای هم ارزی این رابطه به صورت زیر می‌باشند:

$$\bar{a} = \{a, b\}\ ،\bar{b} = \{a, b\}\ ،\bar{c} = \{c, d\}\ ،\bar{d} = \{c, d\}\ ،\bar{e} = \{e\}$$

۲-۳-۱۶ مثال. رابطه هم ارزی $\equiv_۲$ روی $\mathbb{Z}$ را در نظر بگیرید. در این صورت

$$\bar{۱} = \{x \in \mathbb{Z} | x \equiv_۲ ۱\} = \{x \in \mathbb{Z} | \exists k \in \mathbb{Z}, x - ۱ = ۲k\} = \{x \in \mathbb{Z} | \exists k \in \mathbb{Z}, x = ۲k + ۱\}$$

به عبارت دیگر $\bar{۱}$ مجموعه همه اعداد فرد در $\mathbb{Z}$ است. به همین ترتیب می‌توان کلاس $\bar{۳}$ زیر یافت.

$$\bar{۳} = \{x \in \mathbb{Z} | x \equiv_۲ ۳\} = \{x \in \mathbb{Z} | \exists k \in \mathbb{Z}, x - ۳ = ۲k\} = \{x \in \mathbb{Z} | \exists k \in \mathbb{Z}, x = ۲k + ۳\}$$
$$= \{x \in \mathbb{Z} | \exists k \in \mathbb{Z}, ۲(k + ۱) + ۱ = \bar{۱}$$

۲-۳-۱۷ تمرین. در مثال ۴ـ۳ـ۱۶ کلاسهای هم ارزی $\bar{۵}, \bar{۷}, \bar{-۱}, \bar{-۳}$ را نیز بیابید. همچنین کلاسهای $\bar{۰}, \bar{۲}, \bar{۴}, \bar{۶}$ را بدست آورید.

در دو قضیه بعد ارتباط کلاسهای هم ارزی را با یکدیگر بررسی می‌کنیم.

۲-۳-۱۸ قضیه. فرض کنید $\sim$ یک رابطه هم ارزی روی مجموعه A باشد و $a, b \in A$. در این صورت

$$a \sim b \Longleftrightarrow \bar{a} = \bar{b}$$

اثبات. ابتدا فرض کنید $a \sim b$. نشان می‌دهیم $\bar{a} = \bar{b}$. فرض کنید $x \in \bar{a}$ پس $x \sim a$. طبق فرض $a \sim b$ و از آنجا که $\sim$ هم ارزی است، پس $x \sim b$. یعنی $x \in \bar{b}$ و در نتیجه $\bar{a} \subseteq \bar{b}$. به همین ترتیب می‌توان نشان داد که $\bar{b} \subseteq \bar{a}$ و در نتیجه $\bar{a} = \bar{b}$.

حال فرض کنید $\bar{a} = \bar{b}$. نشان می‌دهیم که $a \sim b$. از آنجا که $\sim$ بازتابی است، پس برای هر $x \in A$ داریم $x \sim x$. یعنی $x \in \bar{x}$. حال

$$a \in \bar{a} \wedge \bar{a} = \bar{b} \Longrightarrow a \in \bar{b} \Longrightarrow a \sim b. \bullet$$

۲-۳-۱۹ نکته. با توجه به قضیه ۴ـ۳ـ۱۸ و نقیض کردن گزاره‌ها داریم:

$$a \not\sim b \Longleftrightarrow \bar{a} \neq \bar{b}$$

به عبارت دیگر اگر a و b هم ارز نباشند، آنگاه کلاسهای هم ارزی آنها مساوی نخواهند بود. اما در واقع می‌توان چیزی بیشتر از این را اثبات کرد. به قضیه زیر توجه کنید.

۲-۳-۲۰ قضیه. فرض کنید $\sim$ یک هم ارزی روی مجموعه A باشد و $a, b \in A$. در این صورت

$$a \not\sim b \Longleftrightarrow \bar{a} \cap \bar{b} = \varphi$$

اثبات. ابتدا فرض کنید $a \not\sim b$. طبق فرض خلف، فرض کنید $\bar{a} \cap \bar{b} \neq \varphi$. بنابراین عنصر $x \in \bar{a} \cap \bar{b}$ وجود دارد. یعنی $x \in \bar{a}$ و $x \in \bar{b}$. پس $x \sim a$ و $x \sim b$. از آنجا که $\sim$ متقارن است $a \sim x$. حال با توجه به انتقالی بودن $\sim$ و اینکه $a \sim x$ و $x \sim b$، نتیجه می‌شود $a \sim b$ که تناقض است. پس $\bar{a} \cap \bar{b} = \varphi$. برعکس، فرض کنید $\bar{a} \cap \bar{b} = \varphi$ پس $\bar{a} \neq \bar{b}$. طبق نکته ۴ـ۳ـ۱۹ داریم $a \not\sim b$. •

۲-۳-۲۱ تعریف. فرض کنید $\sim$ یک هم ارزی روی مجموعه A باشد. در این صورت مجموعه خارج قسمت A روی $\sim$ که با نماد $A/_\sim$ نمایش داده می‌شود، عبارت است از مجموعه همه کلاسهای هم ارزی عناصر A. به عبارت دیگر $A/_\sim = \{\bar{a} | a \in A\}$.

۲-۳-۲۲ مثال. مجموعه $A = \{a, b, c\}$ و روابط هم ارزی R_1 تا R_5 در مثال ۴ـ۳ـ۸ را در نظر بگیرید. مجموعه کلاسهای هم ارزی برای هر یک از این روابط به صورت زیر می‌باشند:

$$A/_{R_1} = \{\{a\}, \{b\}, \{c\}\}$$

$$A/_{R_2} = \{\{a, b\}, \{c\}\}$$

$$A/_{R_3} = \{\{a, c\}, \{b\}\}$$

$$A/_{R_4} = \{\{a\}, \{b, c\}\}$$

$$A/_{R_5} = \{\{a, b, c\}\}$$

۲-۳-۲۳ نکته. شاید تا کنون به این نکته توجه کرده باشید که:

الف) کلاسهای هم ارزی ناتهی هستند، زیرا هر رابطه هم ارزی، بازتابی است و در نتیجه برای هر $a \in A$، $a \sim a$. یعنی $a \in \bar{a}$ و در نتیجه $\bar{a} \neq \varphi$.

ب) کلاسهای هم ارزی متفاوت، مجزا هستند. به عبارت دیگر کلاسهای هم ارزی یا مساویند یا مجزا.

ج) اجتماع کلاسهای هم ارزی مجموعه A را می‌سازد. یعنی هر یک از اعضای A در یکی از کلاسهای هم ارزی قرار دارند.

به عبارت دیگر رابطه هم ارزی روی A باشد، آنگاه کلاسهای هم ارزی این رابطه مجموعه A را به زیر مجموعه‌های ناتهی و دو به دو مجزا تقسیم می‌کنند. به مثال زیر توجه کنید.

۲-۳-۲۴ مثال. رابطه هم نهشتی به پیمانه n را روی $\mathbb{Z}$ در نظر بگیرید. می‌خواهیم کلاسهای هم ارزی مجزای این رابطه را بدست آوریم. فرض کنید که m یک عدد دلخواه در $\mathbb{Z}$ باشد. طبق الگوریتم تقسیم، اعداد صحیح q و r وجود دارند که $m = nq + r$ و $۰ \leq r \leq n - ۱$. یعنی می‌توان عدد m را بر n تقسیم کرد، q خارج قسمت و r باقیمانده این تقسیم است. بدیهی است که $۰ \leq r \leq n - ۱$. در این صورت $m \equiv_n r$. پس m عضوی از کلاس هم ارزی r است. یعنی هر عدد صحیح در یکی از کلاسهای هم ارزی r قرار می‌گیرد که $۰ \leq\leq n - ۱$. بنابراین کلاسهای هم ارزی مجزای این رابطه عبارتند از: $\bar{۰} = \bar{۱}, \cdots, \overline{n-۱}$. به عبارت دیگر رابطه $\equiv_n$ دارای n کلاس هم ارزی مجزاست و $\mathbb{Z}/_{\equiv_n} = \{\bar{۰}, \bar{۱}, \cdots, \overline{n-۱}\}$. بدیهی است که این کلاسها ناتهی و دو به دو مجزا هستند. علاوه براین اجتماع آنها مجموعه $\mathbb{Z}$ را می‌سازد.

با توجه به نکته و مثال فوق، آماده‌ایم تا تعریف افراز را ارایه دهیم.

۲-۳-۲۵ تعریف. فرض کنید A یک مجموعه ناتهی باشد. در این صورت زیر مجموعه $\mathbb{P}$ از $P(A)$ را یک افراز[۱۷] A می‌نامیم، هرگاه:

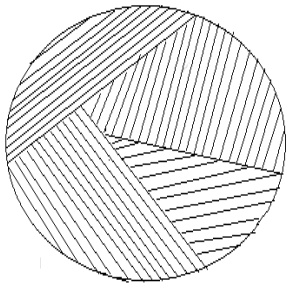
الف) هر عضو $\mathbb{P}$ ناتهی باشد.

17) Partition

ب) اعضای $\mathbb{P}$ دو به دو مجزا باشند.

ج) اجتماع $\mathbb{P}$ مساوی A باشد.

بطور شهودی می‌توان گفت که یک افراز A، مجموعه A را به زیرمجموعه‌های ناتهی تقسیم می‌کند. به شکل ۴ـ۶ توجه کنید.



شکل ۴ـ۶

بدیهی است که یک مجموعه ناتهی را می‌توان به روشهای مختلف افراز کرد.

۲-۳-۲۶ مثال. فرض کنید $A = \{a, b, c\}$. می‌خواهیم افرازهای مختلف بر روی A را بدست آوریم. برای شروع ابتدا A را به سه زیر مجموعه تک عضوی تقسیم می‌کنیم. یعنی

$$\mathbb{P}_۱ = \{\{a\}, \{b\}, \{c\}\}$$

می‌توان هر دو عضو A را در یک مجموعه قرار داد و عنصر سوم را به عنوان یک مجموعه تک عضوی در نظر گرفت. بدین ترتیب سه افراز زیر را بدست می‌آوریم:

$$\mathbb{P}_۲ = \{\{a, b\}, \{c\}\}$$

$$\mathbb{P}_۳ = \{\{a, c\}, \{b\}\}$$

$$\mathbb{P}_۴ = \{\{a\}, \{b, c\}\}$$

آخرین افرازی که می‌توان روی A در نظر گرفت، آن است که خودA را به عنوان یک زیرمجموعه A در نظر بگیریم و یک افراز تک عضوی داشته باشیم.

$$\mathbb{P}_5 = \{\{a, b, c\}\}$$

۲-۳-۲۷ نکته. با توجه به نکته ۴ـ۳ـ۲۳ می‌دانیم که مجموعه کلاسهای هم ارزی روی یک مجموعه، یک افراز روی آن مجموعه را می‌سازند. حال با مقایسه افرازهای بدست آمده بر روی یک مجموعه سه عضوی A، در مثال ۴ـ۳ـ۲۶ و مجموعه کلاسهای هم ارزی وابسته به رابطه‌های هم ارزی مختلف روی A در مثال ۴ـ۳ـ۲۲، مشاهده می‌شود که هر یک از این افراز ها می‌توانند مجموعه کلاسهای هم ارزی یک رابطه هم ارزی روی A باشند. در تعریف و قضیه بعدی نشان می‌دهیم که هر افراز A می‌تواند یک رابطه هم ارزی روی A تعریف کند که کلاسهای هم ارزی آن رابطه، همان افراز اولیه باشد.

۲-۳-۲۸ تعریف. فرض کنید A یک مجموعه ناتهی و $\mathbb{P}$ یک افرازA باشد. رابطه $\sim_{\mathbb{P}}$ را روی A به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$X \sim_{\mathbb{P}} y \Longleftrightarrow \exists X \in \mathbb{P}, x, y \in X$$

رابطه $\sim_{\mathbb{P}}$ را رابطه هم ارزی وابسته به افراز$\mathbb{P}$ می‌نامیم. رابطه $\sim_{\mathbb{P}}$ را با نماد $A/_{\mathbb{P}}$ نیز نمایش می‌دهند.

۲-۳-۲۹ قضیه. فرض کنید A یک مجموعه ناتهی و $\mathbb{P}$ یک افرازA باشد. در این صورت:

الف) رابطه $\sim_{\mathbb{P}}$ یک رابطه هم ارزی روی A است.

ب) $A/_{\sim_{\mathbb{P}}} = \mathbb{P}$.

اثبات. **الف)** عنصر$x \in A$ را در نظر بگیرید. از آنجا که$\mathbb{P}$ افرازA است، پس $\bigcup \mathbb{P} = A$ و در نتیجه $x \in \bigcup \mathbb{P}$. بنابراین مجموعه$X \in \mathbb{P}$ وجود دارد که $x \in X$. از آنجا که $x, x \in X$، پس طبق تعریف، $x \sim_{\mathbb{P}} x$. یعنی $\sim_{\mathbb{P}}$ بازتابی است.

حال فرض کنید$x \sim_{\mathbb{P}} y$. پس مجموعه $X \in \mathbb{P}$ وجود دارد که $x, y \in X$. در نتیجه $y, x \in X$. یعنی$y \sim_{\mathbb{P}} x$. بنابراین $\sim_{\mathbb{P}}$ متقارن است. برای اثبات انتقالی بودن $\sim_{\mathbb{P}}$، فرض کنید $x \sim_{\mathbb{P}} y$ و $y \sim_{\mathbb{P}} z$.

یعنی مجموعه‌های $X, Y \in \mathbb{P}$ وجود دارند که $x, y \in X$ و $y, z \in Y$. از آنجا که $y \in X \cap Y$، پس $X \cap Y = \varphi$ و چون $\mathbb{P}$ یک افراز است، داریم $X = Y$. در نتیجه $x, z \in X$. یعنی $x \sim_{\mathbb{P}} z$.

ب) می‌دانیم که افراز $\mathbb{P}$ و مجموعه کلاسهای هم ارزی $A/_{\sim_{\mathbb{P}}}$ مجموعه‌هایی از زیر مجموعه‌های A هستند. تساوی آنها را با عضوگیری نشان می‌دهیم.

فرض کنید $X \in \mathbb{P}$. از آنجا که $\mathbb{P}$ افراز است، پس $X \neq \varphi$. یعنی عنصر $a \in X$ وجود دارد. ادعا می‌کنیم که کلاس هم ارزی a همان مجموعه X است.

فرض کنید $x \in \bar{a}$. بنابراین $x \sim_{\mathbb{P}} a$. طبق تعریف مجموعه $Y \in \mathbb{P}$ وجود دارد که $a, x \in Y$. از آنجا که $a \in X$، پس $X = Y$. یعنی $x \in X$. پس $\bar{a} \subseteq X$. برعکس، فرض کنید $x \in X$. از آنجا که طبق فرض $a \in X$، پس $x \sim_{\mathbb{P}} a$. یعنی $x \in \bar{a}$ و در نتیجه $\bar{a} = X$. بنابراین هر عضو افراز $\mathbb{P}$ برابر یک عضو از کلاسهای هم ارزی است.

حال نشان می‌دهیم که هر کلاس هم ارزی در مجموعه $A/_{\sim_{\mathbb{P}}}$ یکی از اعضای افراز $\mathbb{P}$ است. کلاس هم ارزی $\bar{a} \in A/_{\sim_{\mathbb{P}}}$ را در نظر بگیرید. می‌دانیم که $a \in \bar{a}$. از طرفی $a \in A = \bigcup \mathbb{P}$. پس $X \in \mathbb{P}$ وجود دارد که $a \in X$. نشان می‌دهیم $\bar{a} = X$.

بدیهی است که اگر $x \in X$، آنگاه $x, a \in X$. پس $x \sim_{\mathbb{P}} a$. یعنی $a \in \bar{a}$. در نتیجه $X \subseteq \bar{a}$. حال عنصر $x \in \bar{a}$ را در نظر بگیرید. از آنجا که $x \in A = \bigcup \mathbb{P}$، پس عنصر $Y \in \mathbb{P}$ وجود دارد که $x \in Y$. از طرفی $x \in \bar{a}$، پس $x \sim_{\mathbb{P}} a$. یعنی $a, x \in Y$. بنابراین $a \in X \cap Y$. در نتیجه $X = Y$. بنابراین $x \in X$ و $\bar{a} \subseteq X$. •

۲-۳-۳۰ تمرین. مجموعه $A = \{a, b, c, d, e\}$ و افراز $\mathbb{P} = \{\{a, b\}, \{c\}, \{d, e\}\}$ روی A را در نظر بگیرید.

الف) رابطه هم ارزی وابسته به افراز $\mathbb{P}$ را با زوج‌های مرتب نمایش دهید.

ب) کلاسهای هم ارزی این رابطه را بدست آورید.

۲-۳-۳۱ تمرین. فرض کنید $\sim$ یک رابطه هم ارزی روی مجموعه ناتهی A باشد. اگر قرار دهیم $A/_{\sim} = \mathbb{P}$، نشان دهید $A/_{\mathbb{P}} = A/_{(A/_{\sim})} = \sim$.

۲-۴ رابطه ترتیبی[18] و مشبکه[19]

در این بخش به معرفی یک دسته دیگر از روابط می‌پردازیم که بر روی یک مجموعه تعریف شده‌اند. مجموعه‌هایی که روابط ترتیبی بر روی آنها تعریف شده است، ساختارهای جبری مرتب را می‌سازند، که نقش مهمی را در جبر ایفاء می‌کنند. مشبکه‌ها را نیز به عنوان ابتدایی ترین ساختار جبری مرتب مورد مطالعه قرار می‌دهیم. در ابتدا به تعاریف اولیه می‌پردازیم.

۲-۴-۱ تعریف. رابطه R را روی مجموعه A یک رابطه پادمتقارن[20] می‌نامیم، اگر aRb و bRa نتیجه دهد که $a = b$. به عبارت دیگر

$$R \Longleftrightarrow (aRb \wedge bRa \Longrightarrow a = b) \quad \text{پاد متقارن است.}$$

۲-۴-۲ تعریف. رابطه R را روی مجموعه A یک ترتیب جزیی[21] می‌نامیم، اگر R بازتابی، پادمتقارن و انتقالی باشد.

۲-۴-۳ مثال. فرض کنید A یک مجموعه باشد. رابطه شمول $(\subseteq)$[5] را روی تمام زیرمجموعه‌های A در نظر بگیرید. برای هر $X \in P(A)$ داریم $X \subseteq X$. یعنی رابطه $\subseteq$ روی $P(A)$ بازتابی است. اگر $X \subseteq Y$ و $Y \subseteq X$ آنگاه $X = Y$. پس $\subseteq$ روی $P(A)$ پادمتقارن است. به وضوح $\subseteq$ روی $P(A)$ انتقالی است. زیرا از $X \subseteq Y$ و $Y \subseteq Z$ نتیجه می‌شود $X \subseteq Z$. بنابراین $\subseteq$ یک ترتیب جزیی روی $P(A)$ است.

۲-۴-۴ مثال. رابطه $\leq$ را روی مجموعه اعداد حقیقی در نظر بگیرید. برای هر $x \in \mathbb{R}$ داریم $x \leq x$. پس $\leq$ روی $\mathbb{R}$ بازتابی است. اگر $x \leq y$ و $y \leq x$ آنگاه $x = y$. بنابراین $\leq$ روی $\mathbb{R}$ پادمتقارن است. اگر $x \leq y$ و $y \leq z$ آنگاه $x \leq z$. پس $\leq$ روی $\mathbb{R}$ انتقالی است و در نتیجه $\leq$ روی $\mathbb{R}$ یک ترتیب جزیی است.

19) Ordered relation 19) Lattice 20) Anti-symmetric 21) Partial order

۲-۴-۵ مثال. رابطه شمردن[22] (یا عاد کردن) را به صورت زیر روی مجموعه اعداد طبیعی در نظر بگیرید:

$$x|y \Longleftrightarrow \exists k \in \mathbb{N}, y = kx$$

به راحتی می‌توان بررسی کرد که رابطه "|" روی $\mathbb{N}$ یک ترتیب جزیی است.

۲-۴-۶ تعریف. فرض کنید $\leq$ یک رابطه ترتیب جزیی روی A باشد. در این صورت A را یک مجموعه مرتب جزیی[23] می نامیم. مجموعه مرتب جزیی A همراه با رابطه ترتیب جزیی آن را با نماد $(A, \leq)$ نشان می‌دهیم.

۲-۴-۷ مثال.

الف) فرض کنید $\mathbb{R}$ مجموعه اعداد حقیقی باشد. در این صورت $(\mathbb{R}, \leq)$ که در آن $\leq$ همان رابطه کمتر یا مساوی اعداد است، یک مجموعه مرتب جزیی است.

ب) اگر A یک مجموعه دلخواه باشد، آنگاه $(P(A), \subseteq)$ یک مجموعه مرتب جزیی است.

ج) مجموعه اعداد طبیعی همراه با رابطه شمردن، یعنی $(\mathbb{N}, |)$، یک مجموعه مرتب جزیی است.

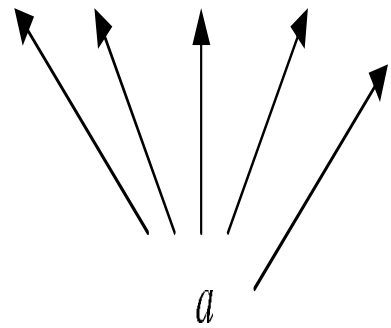
۲-۴-۸ نکته. روابط ترتیب جزیی را معمولاً توسط نمودار نمایش می‌دهیم، بدین صورت که aRb را توسط $a \longrightarrow b$ نمایش می‌دهیم و می‌گوییم a کوچکتر یا مساوی b است (یا b بزرگتر یا مساوی a است). اگر در رابطه داشته باشیم aRc وcRb، می‌توان این نمودار را به صورت $a \longrightarrow c \longrightarrow b$ اصلاح کرد. در نمودارهایی که برای روابط ترتیبی رسم می‌شود، بازتابی بودن رابطه نمایش داده نمی‌شود. به مثال زیر توجه کنید.

۲-۴-۹ مثال. مجموعه $A = \{a, b, c, d, e, f\}$ و رابطه ترتیب جزیی $\leq$ را به صورت زیر روی در نظر بگیرید:

$$\leq = I_A \cup \{(a, b), (a, c), (a, d), (a, e), (a, f), (c, d), (f, b)\}$$

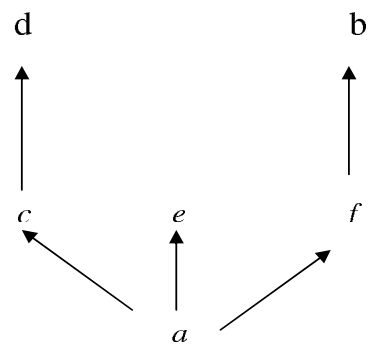
22) Divisibility relation 23) Partial ordered set

با توجه به زوجهای مرتب $(a,b),(a,c),(a,d),(a,e),(a,f)$ باید نموداری به فرم زیر رسم کنیم:



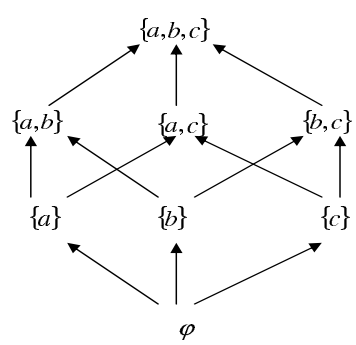
شکل ۴ـ۷

اما زوجهای مرتب $(c,d),(f,b)$ باعث می‌شوند که نمودار را به صورت زیر اصلاح کنیم:



شکل ۴ـ۸

۲-۴-۱۰ مثال. مجموعه $A=\{a,b,c\}$ را در نظر بگیرید. می‌دانیم $(P(A),\subseteq)$ یک مجموعه مرتب جزیی است. نمودار این رابطه به صورت زیر است:



شکل ۴ـ۹

۲-۴-۱۱ تمرین.

الف) نمودار رابطه ترتیب جزیی زیر را روی $A = \{a, b, c, d, e, f\}$ رسم کنید:

$$\leq = I_A \cup \{(b, a), (c, a), (c, d), (c, e), (c, f), (e, a), (e, b), (e, f)\}$$

ب) رابطه شمردن را روی مجموعه $A = \{x \in \mathbb{N} | ۱ \leq x \leq ۱۰\}$ در نظر بگیرید. ابتدا این رابطه را با زوجهای مرتب آن مشخص کنید، سپس نمودار آن را رسم کنید.

۲-۴-۱۲ تعریف. فرض کنید $(A, \leq)$ یک مجموعه مرتب جزیی باشد. در این صورت عناصر $a, b \in A$ را مقایسه‌پذیر[۲۴] گوییم اگر $a \leq b$ یا $b \leq a$. در غیر این صورت آنها را مقایسه‌ناپذیر[۲۵] می‌گوییم.

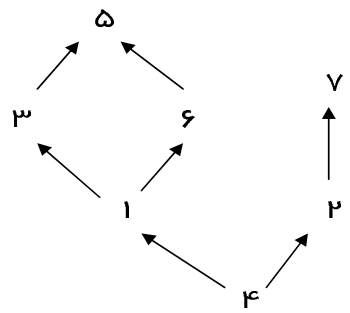
۲-۴-۱۳ مثال. مجموعه مرتب جزیی $(P(A), \subseteq)$ در مثال ۴ـ۴ـ۱۰ را در نظر بگیرید. در این صورت عناصر $\{a\}$ و $\{b\}$ مقایسه ناپذیرند. از طرفی $\{a\} \subseteq \{a, c\}$. پس این دو عضو مقایسه پذیرند. سایر عناصر مقایسه پذیر و مقایسه ناپذیر این رابطه را مشخص کنید.

۲-۴-۱۴ تمرین. رابطه ترتیب جزیی زیر را روی $A = \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶, ۷\}$ تعریف شده و توسط نمودار زیر نمایش داده شده‌است را در نظر بگیرید:

الف) زوجهای مرتب این رابطه را مشخص کنید.

ب) عناصر مقایسه پذیر و مقایسه ناپذیر آن را مشخص کنید.

24) Comparable 25) Incomparable



شکل ۴ـ۱۰

۲-۴-۱۵ تعریف. فرض کنید $(A, \leq)$ یک مجموعه مرتب جزیی باشد. در این صورت:

الف) عضو $a \in A$ را بزرگترین عضو[۲۶] A می‌نامیم، اگر برای هر $x \in A$ داشته باشیم $x \leq a$. به عبارت دیگر، a بزرگترین عضو A است اگر از همه اعضای A بزرگتر باشد.

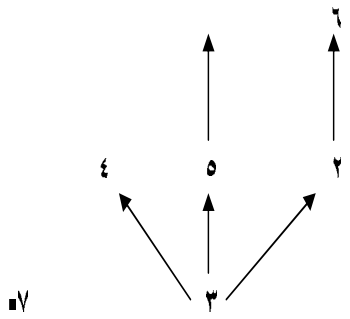
ب) عضو $a \in A$ را کوچکترین عضو[۲۷] A می‌نامیم، اگر برای هر $x \in A$ داشته باشیم $a \leq x$. به عبارت دیگر، a کوچکترین عضو A است اگر از همه اعضای A کوچکتر باشد.

ج) عضو $a \in A$ را عضو ماکزیمال[۲۸] A می‌نامیم، اگر $a \leq x$ نتیجه دهد $a = x$. به عبارت دیگر، a عضو ماکزیمال A است اگر عضوی بزرگتر از a وجود نداشته باشد.

د) عضو $a \in A$ را عضو می‌نیمال[۲۹] A می‌نامیم، اگر $x \leq a$ نتیجه دهد $a = x$. به عبارت دیگر، a عضو می‌نیمال A است اگر عضوی کوچکتر از a وجود نداشته باشد.

۲-۴-۱۶ مثال. رابطه ترتیب جزیی زیر را روی مجموعه $A = \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶, ۷\}$ در نظر بگیرید. در این صورت اعضای ۳ و ۷ می‌نیمال هستند، زیرا عضوی کوچکتر از آنها وجود ندارد. (مؤلفه دوم هیچ زوج مرتبی بجز $(۳, ۳)$ و $(۷, ۷)$ نیستند). به همین ترتیب اعضای ۶، ۱، ۴ و ۷ ماکزیمال هستند، زیرا عضوی بزرگتر از آنها وجود ندارد. (مؤلفه اول هیچ زوج مرتبی بجز (a, a) نیستند). این رابطه بزرگترین عضو و کوچکترین عضو ندارد.

26) Maximum element 27) Minimum element 28) Maimal element 29) Minimal element



شکل ۴ـ۱۱

۲-۴-۱۷ مثال. مجموعه مرتب جزیی $(P(A), \subseteq)$ در مثال ۴ـ۴ـ۱۰ را در نظر بگیرید. این رابطه دارای کوچکترین عضو φ و بزرگترین عضو A است. بدیهی است که φ عضو می‌نیمال $P(A)$ تحت این رابطه و A عضو ماکزیمال آن است.

۲-۴-۱۸ نکته. دقت کنید که بزرگترین عضو مجموعه A تحت رابطه ترتیب جزیی $\leq$ در صورت وجود، عضو ماکزیمال نیز خواهد بود. به همین ترتیب کوچکترین عضو مجموعه A تحت رابطه $\leq$ در صورت وجود، می‌نیمال خواهد بود.

۲-۴-۱۹ قضیه. فرض کنید $(A, \leq)$ یک مجموعه مرتب جزیی باشد. در این صورت کوچکترین و بزرگترین عضو در صورت وجود منحصربفردند.

اثبات. فرض کنید a و a' هر دو بزرگترین عضو A باشند. از آنجا که a بزرگترین عضو A است، پس $a' \leq a$ و از آنجا که a' بزرگترین عضوA است، داریم $a \leq a'$. امّا رابطه $\leq$ پادمتقارن است، بنابراین $a = a'$. به همین ترتیب می‌توان منحصربفرد بودن کوچکترین عضو A را اثبات کرد. •

۲-۴-۲۰ تمرین. اعضای ماکزیمال و می‌نیمال، همچنین کوچکترین و بزرگترین عضوA را در رابطه ترتیب جزیی تمرین ۴ـ۴ـ۱۴ بیابید.

۲-۴-۲۱ تمرین. رابطه شمردن را روی مجموعه $A = \{x \in \mathbb{N} | ۱ \leq x \leq ۱۰\}$ در نظر بگیرید. اعضای ماکزیمال و می‌نیمال، همچنین بزرگترین و کوچکترین عضو A را تحت این رابطه، در صورت وجود بیابید.

۲-۴-۲۲ تمرین. فرض کنید A یک مجموعه متناهی و$\leq$ یک رابطه ترتیب جزیی روی A باشد. ثابت کنید عناصر ماکزیمال و می‌نیمال A وجود دارند.

۲-۴-۲۳ تمرین. مثالی از یک مجموعه و رابطه جزیی روی آن بزنید که عضو ماکزیمال و می‌نیمال نداشته باشد.

۲-۴-۲۴ تعریف. فرض کنید $(A, \leq)$ یک مجموعه مرتب جزیی و B یک زیرمجموعه ناتهی A باشد. در این صورت:

الف) عضو $\alpha \in A$ را در صورت وجود، یک کران بالای[30] B می‌نامیم اگر برای هر $x \in B$ داشته باشیم $x \leq a$.

ب) عضو $\alpha \in A$ را در صورت وجود، یک کران پایین[31] B می‌نامیم اگر برای هر $x \in B$ داشته باشیم $\alpha \leq x$.

ج) عضو $\alpha \in A$ را در صورت وجود، کوچکترین کران بالای[32] B می‌نامیم اگر α یک کران بالای B بوده و برای هر کران بالای دیگر B، مانند β داشته باشیم $\alpha \leq \beta$. به عبارت دیگر در مجموعه کران‌های بالای B، α کوچکترین عضو است.

د) عضو $\alpha \in A$ را در صورت وجود، بزرگترین کران پایین[33] B می‌نامیم اگر α یک کران پایین B بوده و برای هر کران پایین دیگرB، مانند β داشته باشیم$\beta \leq \alpha$. به عبارت دیگر در مجموعه کران‌های پایین B، α بزرگترین عضو است.

30) Upper bound 31) Lower bound 32) Least upper bound(l.u.b.) 33) Greatest lower bound(g.l.b.)

۲۵-۴-۲ مثال. رابطه ترتیب جزیی زیر را روی $A = \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶, ۷\}$ در نظر بگیرید. همچنین زیر مجموعه $B = \{۳, ۶\}$ را در نظر بگیرید. در این صورت مجموعه کران‌های پایین B عبارت است از $\{۱, ۴\}$ و مجموعه کران‌های بالای B مساوی $\{۵\}$ است. کوچکترین کران بالای B مساوی ۵ و بزرگترین کران پایین B مساوی ۱ است.

حال زیرمجموعه $C = \{۲, ۷\}$ را در نظر بگیرید. در این صورت:

مجموعه کران‌های بالای $C = \{۷\}$ و

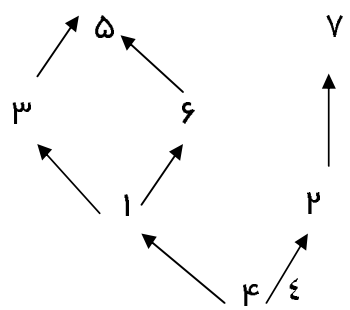
کوچکترین کران بالای $C = ۷$

مجموعه کران‌های پایین $C = \{۲, ۴\}$ و

بزرگترین کران پایین $C = ۲$.

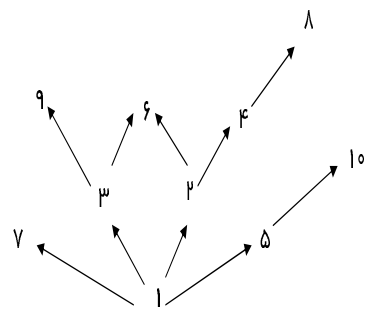
(دقت کنید که در این رابطه۲ $\leq$ ۴)

برای زیرمجموعه $D = \{۶, ۷\}$ کران بالا و در نتیجه کوچکترین کران بالا وجود ندارد. امّا مجموعه کران‌های پایین D مساوی $\{۴\}$ و بزرگترین کران پایین D مساوی ۴ است.



شکل ۴ـ۱۲

۲۶-۴-۲ تمرین. رابطه ترتیب جزیی زیر را روی مجموعه $A = \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶, ۷, ۸, ۹, ۱۰\}$ در نظر بگیرید. برای زیرمجموعه‌های $B_۱ = \{۴, ۳\}$، $B_۲ = \{۲, ۳, ۹\}$ و $B_۳ = \{۲, ۴, ۸\}$، مجموعه کران‌های بالا و پایین، همچنین کوچکترین کران بالا و بزرگترین کران پایین را در صورت وجود بیابید.



شکل ۴ـ۱۳

۲-۴-۲۷ نکته. فرض کنید $(A, \leq)$ یک مجموعه مرتب جزیی و B یک زیرمجموعه ناتهی A باشد. در این صورت:

الف) کوچکترین کران بالای B را در صورت وجود با$l.u.b(B)$ یا $\sup(B)$ (سوپریمم B) نمایش می‌دهیم.

ب) بزرگترین کران پایین B را در صورت وجود با $g.l.b(B)$ یا $\inf(B)$(اینفیمم B) نمایش می‌دهیم.

۲-۴-۲۸ تعریف. فرض کنید $(A, \leq)$ یک مجموعه مرتب جزیی باشد. اگر برای هر دو عضو دلخواه $a, b \in A$ اعضای $\sup\{a, b\}$ و $\inf\{a, b\}$ موجود باشد، آنگاه A را یک مشبکه[۳۴] می‌نامیم.

۲-۴-۲۹ نمادگذاری. فرض کنید$(A, \leq)$ یک مشبکه باشد. در این صورت برای نمایش $\sup\{a, b\}$ از نماد $a \vee b$ و برای نمایش $\inf\{a, b\}$ از نماد $a \wedge b$ استفاده می‌کنیم.

۲-۴-۳۰ مثال. مجموعه مرتب جزیی $(P(A), \subseteq)$ یک مشبکه است، زیرا برای هر دو عضو $X, Y \in P(A)$ داریم:

$$X \vee Y = X \cup Y \in P(A)$$

$$X \wedge Y = X \cap Y \in P(A)$$

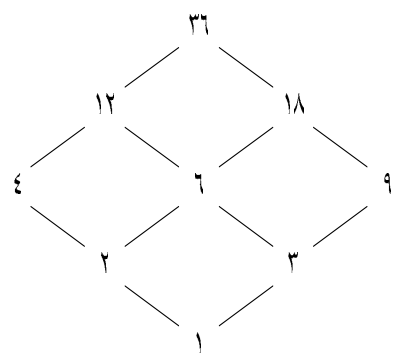
34) Lattice

۲-۴-۳۱ مثال. مجموعه $A = \{۱, ۲, ۳, ۴, ۶, ۹, ۱۲, ۱۸, ۳۶\}$ (مجموعه شمارنده[۳۵]های عدد ۳۶) همراه با رابطه ترتیب جزیی «شمردن»، یک مشبکه است. برای هر دو عضو دلخواه $a, b \in A$ داریم:

$$a \vee = l.c.m.(a, b) \quad (\text{کوچکترین مضرب مشترک}^{۳۶}\ a, b)$$

$$a \wedge b = g.c.d.(a, b) \quad (\text{بزرگترین مقسوم علیه مشترک}^{۳۷}\ a, b)$$

نمودار این رابطه به صورت زیر است:

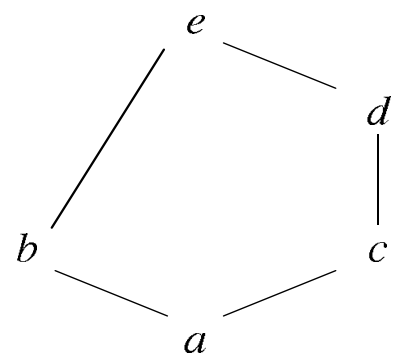


شکل ۴ـ۱۴

۲-۴-۳۲ تمرین. فرض کنید $(A, \leq)$ یک مجموعه مرتب جزیی و B یک زیرمجموعه ناتهی A باشد. نشان دهید $\sup(B)$ و $\inf(B)$ در صورت وجود منحصر بفردند.

۲-۴-۳۳ تمرین. مجموعه مرتب جزیی $(A, \leq)$ با نمودار زیر مشخص شده است. نشان دهید $(A, \leq)$ یک مشبکه است.

35) Divisor



شکل ۴ـ۱۵

در اینجا به بررسی حالت خاصی از روابط ترتیب جزیی، که ترتیب خطی[38] یا ترتیب کلی[39] که در جبر و بحث مشبکه‌ها کاربرد دارند می‌پردازیم.

۲-۴-۳۴ تعریف. فرض کنید $(A, \leq)$ یک مجموعه مرتب جزیی باشد. در این صورت رابطه $\leq$ را یک ترتیب خطی (یا کلی) می‌نامیم هرگاه هر دو عضو دلخواهA مقایسه پذیر باشند.

بدیهی است که نمودار روابط ترتیب خطی به صورت یک خط خواهد بود و به همین دلیل این روابط را ترتیب خطی می‌نامیم. به مثال زیر توجه کنید.

۲-۴-۳۵ مثال.

الف) رابطه $\leq$ روی اعداد حقیقی یک ترتیب خطی است.

ب) رابطه$\subseteq$ روی مجموعه$A = \{\varphi, \{a\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}\}$ یک ترتیب خطی است.

ج) رابطه شمردن ("$|$") روی مجموعه$A = \{\mu^n | n \in \mathbb{N}\}$ یک ترتیب خطی است.

یک رابطه ترتیب جزیی $\leq$ را روی مجموعه ناتهی A در نظر بگیرید. در این صورت می‌توان زیرمجموعه‌ای از A را یافت که مرتب خطی باشد. برای هر مجموعه مرتب جزیی، حداقل زیر مجموعه‌های تک عضوی وجود دارند که مرتب خطی هستند. در بسیاری از موارد می‌توان زیر مجموعه‌های مرتب خطی با بیش از یک عضو یافت. به تعریف زیر توجه کنید.

38) Linear order 39) Total order

۲-۴-۳۶ تعریف. فرض کنید $(A, \leq)$ یک مجموعه مرتب جزیی باشد. در این صورت هر زیر مجموعه مرتب خطی A را یک زنجیر[40] در A می‌نامیم.

۲-۴-۳۷ مثال.

الف) فرض کنید $A = \{a, b, c\}$. در این صورت مجموعه$\{\varphi, \{a\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}\}$ یک زنجیر در است. (می‌توانید زنجیرهای دیگری را بیابید؟)

ب) رابطه شمردن را روی مجموعه اعداد طبیعی در نظر بگیرید. در این صورت هر زیر مجموعه از $\mathbb{N}$ به صورت $\{a^n | n \in \mathbb{N}\}$ (که در آن $a \in \mathbb{N}$) یک زنجیر در $\mathbb{N}$ می‌باشد.

بدیهی است که هر زیر مجموعه‌ای از یک زنجیر نیز یک زنجیر است.

۲-۴-۳۸ تمرین. رابطه ترتیب جزیی تمرین ۴ـ۴ـ۳۳ را در نظر گرفته و کلیه زنجیرهای آن را بیابید.

۲-۴-۳۹ تمرین. در مثال ۴ـ۴ـ۳۷ (ب) آیا می‌توان زنجیرهای دیگری یافت؟ مثال بزنید.

۲-۵ تمرینات کلی

۱) اگر مجموعه‌های A, B, C و D ناتهی باشند، نشان دهید$A \times B = C \times D$ اگر و تنها اگر$B = D$ و $A = C$.

۲) نشان دهید

$$(A \times B) - (C \times D) = ((A - C) \times B) \cup (A \times (B - D))$$

۳) فرض کنید$A = \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} - \{0\})$. رابطه $\sim$ را روی A به صورت زیر تعریف کنید.

$$(a, b) \sim (c, d) \iff ad = bc$$

نشان دهید $\sim$ یک رابطه هم ارزی است و کلاسهای هم ارزی آن را بیابید.

40) Chain

۴) فرض کنید $\{A_1, A_2, \cdots, A_n\}$ یک افراز روی مجموعه A و $\{B_1, B_2, \cdots, B_m\}$ یک افراز روی مجموعه B باشند. نشان دهید $\{A_i \times B_j | i = 1, \cdots, n$ و $j = 1, \cdots, m\}$ یک افراز روی مجموعه $A \times B$ است.

۵) فرض کنید $P = \{A_1, A_2, \cdots, A_k\}$ یک افراز روی مجموعه A و هر A_j شامل n_j (برای $j = 1, \cdots, k$) عضو باشد. ثابت کنید که تعداد زوجهای مرتب رابطه هم ارزی وابسته به افراز P دقیقاً برابر $n = n_1^2 + n_2^2 + \cdots, n_k^2$ است.

۶) مجموعه اعداد طبیعی و رابطه R تعریف شده بر روی آن را به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$xRy \Longleftrightarrow xy = k^2, \exists k \in \mathbb{N}$$

نشان دهید رابطه R یک رابطه هم ارزی است و کلاسهای هم ارزی ۱، ۲ و ۳ را بیابید.

۷) مجموعه اعداد اول بزرگتر از ۲ را X بنامید و رابطه R را به صورت زیر روی X در نظر بگیرید:

$$xRy \Longleftrightarrow \frac{x+y}{2} \in X$$

ثابت کنید R بازتابی و متقارن است ولی انتقالی نیست.

۸) رابطه R را به صورت زیر روی $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ در نظر بگیرید:

$$(a,b)R(c,d) \Longleftrightarrow a + d = b + c$$

نشان دهید R یک رابطه هم ارزی است و کلاسهای هم ارزی را مشخص کنید.

۹) فرض کنید $\leq$ یک رابطه ترتیب خطی روی مجموعه A باشد. نشان دهید:

الف) a کوچکترین عضو A است اگر و تنها اگر a یک عنصر می‌نیمال باشد.

ب) a بزرگترین عضو A است اگر و تنها اگر a یک عنصر ماکزیمال باشد.

۱۰) فرض کنید $(A, \leq)$ یک مجموعه مرتب جزیی باشد. نشان دهید مجموعه همه کران‌های بالای مجموعه φ برابر A است. همچنین مجموعه همه کران‌های پایین مجموعه φ برابر A است. سپس نتیجه بگیرید که $\inf A = \sup \varphi$ و $\sup A = \inf \varphi$.

۱۱) نشان دهید که یک مجموعه مرتب جزیی متناهی همواره دارای عنصر ماکزیمال و می‌نیمال است.

فصل سوم

تابع و مفاهیم آن

هدفهای رفتاری فصل

دانشجویان پس از مطالعه این فصل باید بتوانند:

- تعریف تابع را به عنوان فرآیند بیان کرده، مثالهایی متنوع از آن ارائه دهند.
- ویژگی ضابطه تعریف تابع را داشته و تفاوت آن را با فرمول شرح دهند.
- خوشتعریفی تابع را با مفهوم آن مرتبط دانسته و بدانند که چه موقع نیاز به کنترل خوشتعریفی دارند.
- ارتباط تابع را با رابطه بدانند (چه موقع یک رابطه تابع است؟)
- شرط تساوی توابع را بدانند.
- مفاهیم پوشایی و یک‌یک بودن را تعریف کرده و قضیه‌های مرتبط با آن را بیان و اثبات کنند.
- مفهوم تابع دوسویی (تناظر یک‌به‌یک) را به درستی درک کرده و اهمیت آن را در مقایسه مجموعه‌ها و هم‌ارزی آنها بدانند.
- بدانند که چه موقع f^{-1} تابع است. (قضیه یک‌به‌یک بودن f)

- مفهوم دنباله را به عنوان توابع خاص بدانند.
- ویژگی توابع را از دیدگاه کاتگوری در رابطه با یک‌به‌یک بودن و پوشا بودن بیان و اثبات کنند.

تاریخچه تابع. تابع در جبر اعداد از آغاز تمدن بشر مورد استفاده بوده است. بشر از وقتی که با اعداد طبیعی آشنا شده است، شاید از ۷ هزار سال پیش، با جمع و ضرب اعداد سر و کار داشته است. امّا، جمع چیست؟

۳-۱ تاریخچه تابع

در حساب ابتدایی به ما گفته شده است که جمع یک «عمل» است، عملی که به ازای هر دو عدد، عدد سومی را به دست می‌دهد. امّا «عمل» چیزی جز تابع نمی‌باشد. در واقع وقتی به مقادیر جمع که همان حاصل جمع است، بنگریم به آسانی درمی‌یابیم که ما در واقع با یک تابع سروکار داریم:

و یا به زبان نمادی $۲ + ۳ = ۵$، $(۲, ۳,) \overset{+}{\rightsquigarrow} ۵$

$۷ + ۱ = ۸$، $(۷, ۱) \overset{+}{\rightsquigarrow} ۸$ $\qquad$ $۴ + ۲ = ۶$، $(۴, ۲) \overset{+}{\rightsquigarrow} ۶$

$(۲, ۳)$، $(۴, ۲)$ و $(۷, ۱)$ و سایر زوجهای مرتب اعداد طبیعی به مجموعه $N \times N$ تعلق دارند. عمل $+$ نشانگر تابعی مانند f است که دامنهٔ آن $N \times N$ و برد آن نیز N است.

$$f : N \times N \longrightarrow N$$

$$f(۲, ۳) = ۴,\ f(۴, ۲) = ۶, f(۷, ۱) = ۸, \cdots$$

اصطلاحاً گفته می‌شود که f (عمل جمع) یک تابع «متغیر» است، زیرا عناصر دامنه آن متشکل از ۲ −تایی مرتب می‌باشد. پس « عمل جمع» تابعی است بر $N \times N$ به توی N، زیرا به ازای هر زوج از اعداد طبیعی عددی مشخص و منحصر به فرد را به دست می‌دهد. اکنون مفهوم عمل را به آسانی می‌توانیم تعمیم دهیم. یک عمل مانند O در مجموعه A تابعی است که دامنهٔ آن $A \times A$ و همدانه آن A است، $o : A \times A \longrightarrow A$. مقدار o را به ازای زوج (x, y) از $A \times A$ در علم جبر به جای $o(x, y)$ به xoy نشان می‌دهند. دانش آموزان، در دوره تحصیل ابتدایی، با عمل که همان تابع است به شکل جدول تابع آشنا می‌شوند:

		$+$	$+(m,n)$
۲	۳	$\longrightarrow$	۵
۴	۲		۶
۷	۱		۸
۲	۴		؟
۷	۸		؟

بدین‌سان از آنان خواسته می‌شود، تا پرکردن ستون آخر، در واقع مقدار تابع را به ازای زوج عدد دو ستون نخستین پیدا کنند. پس هر عمل یک تابع است، امّا همهٔ توابع از چنین عمل نیستند.

تابع چیست؟

۳-۱-۱ تعریف. فرض کنیم A و B دو مجموعه باشند. یک تابع بر A به توی B **فرآیندی** است که به هر عضو A عضو مشخص و منحصر به فردی از B را معین نماید. هرگاه چنین فرآیندی را به f نشان می‌دهیم، برای آنکه مشخص شود که f تابعی بر A به توی B است، به زبان نمادی می‌نویسیم

$$f : A \longrightarrow B$$

اگر f عضو x از A را به عضو y از B نقش کند، می‌نویسیم

$$y = f(x)$$

و y را مقدار تابع f به ازای x می‌نامیم. چون $f(x)$ها به ازای xهای متعلق به A همگی به B تعلق دارند، پس مجموعه مقادیر f یک زیرمجموعه B است. در چنین موقعیتی A را **دامنه تابع** f و B را **همدامنه** f یا برد f می‌نامیم. دامنه f را به $\mathrm{dom}f$؛ همدانه f به $\mathrm{codom}f$ و برد f را به $\mathrm{range}f$ نشان می‌دهیم. به چند مثال توجه می‌کنیم.

۳-۱-۲ مثال. فرض کنیم که به اهالی یک شهر یک شماره (شماره ملی) داده باشیم. چنین فرآیندی یک تابع است؛ زیرا به هر فرد یک و فقط یک عدد نسبت داده می‌شود که همان شماره ملی او است. در

اینجا اهالی شهر دامنه تابع و برد تابع مجموعه عددهای طبیعی است. اگر مجموعه افراد شهر را A و N مجموعه عددهای طبیعی باشد $f : A \longrightarrow N$ و نحوه فرآیند را با تساوی شماره ملی $f(a) = a$.

۳-۱-۳ مثال فرض کنیم A مجموعه افراد ساکن اهواز و B مجموعه حروف الفبای فارسی بوده باشد. آیا فرآیند

$$g : A \longrightarrow B$$

$$g(a) = \text{حرف اول نام خانوادگی } a$$

یک تابع است؟

آری. برای آنکه هر فرد یک نام خانوادگی بیشتر ندارد و آن هم دارای یک فرم اول است.

$$f(\text{محمدی}) = \text{م}, f(\text{مصطفوی}) = \text{م}$$

امّات بعضی از حروف (مقادیر) تابع، در این مثال، بیش از یک بار به عنوان مقدار تابع ظاهر می‌شوند، این منافاتی با تعریف تابع ندارد.

۳-۱-۴ مثال مفهوم «قدر مطلق» که با آن از حساب ابتدایی آشنایی دارید یک تابع است:

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^{\geq ۰}$$

$$f(x) = |x|$$

$f(-۵) = ۵$، $f(\sqrt{۵}) = \sqrt{۵}$ و $f(-۲) = ۲$ و حتی علیهذا. دامنه این تابع، به معنی وسیع آن، $\mathbb{R}$ و همدامنهٔ آن مجموعه اعداد حقیقی نامنفی است که به $\mathbb{R}^{\geq ۰}$ نشان داده شده است.

۳-۱-۵ مثال فرض کنیم $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ مجموعه زیر مجموعه‌ای $\mathbb{N}$ باشد. می‌دانیم هر زیرمجموعه $\mathbb{N}$ به جز $\mathcal{P}$ یک عضو ابتدا (می‌نیموم) دارد. پس اگر $\mathcal{P}(N) - \{\phi\}$ را به عنوان دامنه اختیار کنیم می‌توانیم تابعی به شکل زیر بسازیم:

$$f : \mathcal{P}(\mathbb{N}) - \{\phi\} \longrightarrow \mathbb{N}$$

$$f(A) = \text{عضو ابتدای } A$$

برای نمونه $f(\mathbb{N}) = ۱$، $f(\{۷, ۸, ۱۰۰۰\}) = ۷$، $f(\{۲۰۰۰, ۲۰۰۰^۲, ۲۰۰۰^۳, \dots\}) = ۲۰۰۰$ و نظایر اینها.

آیا هر عدد طبیعی یک مقدار برای تابع f است؟

ضابطه تابع- بسیاری از توابعی که در ریاضیات رخ می‌دهند، توابعی هستند که مقادیر تابع توسط عبارتی برحسب اعضای دامنه به گونه‌ای شخصی حاصل می‌شوند. در مثالهای قبل عبارتهای

(مثال ۱) $f(a) = a$ شماره ملی

(مثال ۲) $g(a) = a$ حرف اول خانوادگی

(مثال ۳) $f(x) = |x|$

معرف فرآیندهای مورد نظر بود. چنین عبارتهایی را «ضابطه تعریف تابع» می‌نامیم. به طور کلی برای مثال در نمایش

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = x^۲ + ۱$$

عبارت $f(x) = x^۲ + ۱$ ضابطه تعریف چنین تابعی است.

ضابطهٔ تابع به عنوان ماشین عمل می‌کند که وقتی یک عضو دامنه را به آن می‌دهیم عضو مشخصی از آن ماشین خارج می‌شود.

امّا هر عبارت یا فرمولی شامل x به عنوان یک ضابطه تابع نمی‌تواند عمل کند. به عنوان مثال به این فرآیندها توجه کنید

الف)

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = x \text{ جذر جبری}$$

ب) A مجموعه افراد ساکن خرمشهر

$$h : A \longrightarrow A$$

$$h(a) = a \text{ برادر}$$

ج)

$$g : A \longrightarrow A$$

$$g(a) = a \text{ پدر}$$

فرمولهای f و h ضابطه نیستند، زیرا به ازای برخی مقادیر x، $f(x)$ منحصر به فرد نمی‌باشد،

$$f(۴) = ۲,\ f(۴) = -۲$$

در حالی که g یک تابع است، برای هر a، $g(a)$ کاملاً مشخص و منحصر به فرد می‌باشد. در ادبیات ریاضی می‌گویند که ضابطه‌های f و h **خوشتعریف** نیستند. یک تابع باید در هر مورد خوشتعریف باشد. در غیر این صورت اصلاً تابع به حساب نمی‌آید.

۳-۲ خوشتعریفی

هرگاه بخواهیم خوشتعریفی تابعی را ثابت کنیم، باید ثابت کنیم که برای x متعلق به دامنه تابع مقدار تابع به ازای آن x مشخص و منحصر به فرد است.

نکته. در غالب موارد، ضابطه تابع چنان است که باملاحظه آن به فوریت معلوم است که تابع مورد نظر خوشتعریف است. برای نمونه در موارد ذیل

الف) $g : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$, $g(x) = [x]$

ب) $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, $f(x) = n^۲ + ۱$

ج) $h : Q \longrightarrow Q$, $h(\frac{p}{g}) = \frac{۱}{۲}$

د) $i : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $i(x) = ۲$

نیازی به اثبات خوشتعریفی تابع نمی‌باشد، چرا که مثلاً برای هر عدد طبیعی مشخص n ، $n^2 + 1$ یکتا است و یا آنکه برای هرکسر $\frac{p}{y}$، $\frac{1}{g}$ مشخص و یکتا است و قس علیهذا در موارد (الف) و (د). **امّا در مواردی مساله به این بداهت نمی‌باشد.** به مثال زیر توجه کنید:

مثال. فرض کنیم برای اولین بار جزء صحیح هر عدد حقیقی را تعریف کنیم: به عنوان بزرگترین عدد صحیح که از آن عدد کوچکتر یا برابر است. سپس ادّعا کنیم که نگاشت (۱)

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{Z}$$

$$f(x) = [x]$$

یک تابع است. در اینجا نیازمند اثبات خوشتعریفی f هستیم. زیرا هنوز نمی‌دانیم که برای هر x معین، $[x]$ یکتا و منحصر به فرد است. اثبات زیر برای خوشتعریفی، یعنی تابع بودن نگاشت f، می‌تواند ارائه گردد.

فرض کنیم n_1 بزرگترین عدد صحیحی باشد که $n_1 \leq x$ ($f(x) = n_1$). و در عین حال n_2 بزرگترین عدد صحیح باشد که $n_2 \leq x$. ($f(x) = n_2$). باید نشان دهیم که $n_1 = n_2$. در چنین صورتی نشان داده‌ایم که با داشتن یک x ثابت $f(x)$ منحصر به فرد است. گوئیم چون $n_2 \leq x$ و n_1 بزرگترین عدد صحیحی است که $n_1 \leq x$ پس $n_2 \leq n_1$. (۱)

مشابهاً چون $n_1 \leq x$ و n_2 بزرگترین عدد صحیحی است که $n_2 \leq x$ پس $n_1 \leq n_2$. (۲)

از روابط (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم که $n_1 = n_2$. در مواردی که در ریاضیات عالی محتاج اثبات خوشتعریفی هستیم، می‌بایست به دو نکته مهم توجه کنیم.

۱) ضابطه تابع به وضوح یکتایی مقدار تابع را نشان ندهد، مانند مثالهای (ب) و (ج) و (د) فوق الاشاره.

۲) برای اثبات خوشتعریفی با یک x دلخواه باید ثابت کنیم که $f(x)$ یکتا است. روش کار در اساس مانند مثال بالا است.

$$[x] \leq x$$

$$f(x) = [x]$$

$n, n \leq x$ بزرگترین عدد صحیح

$n_۱ = n_۲$ پس $n_۲ \leq n,\ n_۱ \leq n_۲ \qquad n_۱ \leq x,\ x_۲ \leq x$

نکته. توابع در ریاضیات و سایر علوم عقلی از زمانهای بسیار دور مورد مطالعه و بررسی بوده‌اند. در گذشته به x به عنوان عضو نمونه‌ای از دامنه **متغیر مستقل** و به $f(x)$، مقدار تابع به ازای x، متغیر وابسته می‌گفته‌اند.

این اصطلاحات هنوز هم در مواردی، به ویژه در حیطه‌های علوم انسانی، مطرح می‌شوند. این نامگذاری که نشأت گرفته از ضابطه تعریف تابع است توجیه‌پذیر می‌نماید. در تابع

$$f(x) = x^۲ + ۱, \qquad x \in \mathbb{R}$$

که دامنه آن $\mathbb{R}$ است، به ازای هر مقدار x، یک مقدار برای y $(f(x))$ به دست می‌آید.

x	۰	۱	۲	۳	۹۰۰۰
$f(x)$	۱	۲	۵	۱۰	۱۷

ملاحظه می‌کنیم که مقدار y $(f(x))$ وابسته به x است. با تغییر مستقل x، $f(x)$ نیز تغییر می‌کند.

نکته. امّا باید توجه داشت که همهٔ توابع مورد بررسی در علوم دارای ضابطه‌ای همچون توابع

$$f(x) = x^۲ + ۱, g(x) =, x, h(x) = \frac{x}{۱ + x^۲}$$

که به صورتی **صریح و و اضح** $f(x)$ را **بر حسب** x به دست دهد **نمی‌باشد.**

به جدول زیر توجه می‌کنیم:

x	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷ ل ۸	۱۰۰
$f(x)$	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۴}$	-۳	۱۰۰۰	-۶	۱۰/۰۰۰	$۱۰^۶$	-۲

این جدول به درستی یک تابع را مشخص می‌کند؛ دامنه این تابع مجموعه $A = \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶, ۷, ۸, ۱۰۰\}$ و برد آن مجموعه عددی

$$B = \{\frac{۱}{۲}, \frac{۱}{۴}, -۳, ۱۰۰۰, -۶, ۱۰,۰۰۰, -۸, ۱۰^۶, -۲\}$$

است و مقدار نظیر هر عضو از A کاملاً شخصی و در زیر آن در جدول درج شده است. امّا این تابع فاقد ضابطه و معادله است. (چرا؟)

در بررسی پدیده‌های طبیعی، وقتی متغیرهایی مورد بررسی و مقدار یابی هستند، غالباً با توابعی سروکار داریم. در وحلهٔ اول یا درج این داده‌ها، یعنی مقادیر متغیرهای مستقل و مقادیر وابسته و متناظر آنها، در یک جدول رفتار پدیده را به صورتی عددی خلاصه می‌کنیم. سعی پژوهشگر در این خصوص آن است که رابطه و ضابطه‌ای بین هر عضو دامنه (x) و عضو نظیر آن به دست آورد. کشف چنین ضابطه‌ای در واقع یک کشف علمی به حساب می‌آید. برای آنکه با کشف چنین ضابطه‌ای می‌توان رفتار پدیده را پیش‌بینی کرد؛ زیرا در اغلب موارد متغیر مستقل x معمولاً زمان و متغیر وابسته به آن، مسافت، درجه حرارت و یا سایر کمیت‌های فیزیکی، اجتماعی، و یا اقتصادی است.

برای نمونه به قانون جاذبه نیوتن توجه می‌کنیم:

$$F = k\frac{mm'}{d^۲}$$

در این قانون m و m' دو جرم تأثیرگذار بر هم، d فاصله این دو جرم و k عددی است ثابت. F مقدار نیروی جاذبه بین دو جرم است. در اینجا F به عنوان تابعی سه متغیره از متغیرهای m و m' و d می‌باشد. که با m و m' نسبت مستقیم و با مجذور فاصله نسبت معکوس دارد. در واقع با نماد ریاضی، باید نوشته شود.

$$F(m, m', d) = k\frac{mm'}{d^۲}$$

که به جهت سهولت، در علوم فیزیک، از نوشتن، m، m' و d درکنار F صرفنظر می‌گردد. کشف رابطه جاذبه دو جرم: یعنی یافتن ضابطه تعریف F به شکل فوق یکی ازکشفیات مهّم علم فیزیک است که برای اولین بار توسط آیزاک نیوتن، ریاضیدان و فیزیکدان قرن هفدهم انجام شده است.

جهان هستی محشر پدیده‌ها است. زلزله، آتشفشان، باران، تغییرات آب و هوا، رشد گیاهان، زوال مواد رادیواکتیو، تغییرات جمعیتی جوامع، انسان، تغییرات زمین، سیارات و منظومه‌های کیهانی، جذر و مد دریاها و افیانوس‌ها و نظایر اینها همه و همه بخشی از پدیده‌های در حال تغییر و تکوین طبیعت هستند. با شناخت پدیده‌ها، مضرات و بلایای آن‌ها کاهش و مزایای آن مورد استفاده آدمی قرار می‌گیرد.

۳-۳ تابع چند متغیره

وصف تابعی که در صفحات پیشین بدان پرداخته شد، ساده‌ترین شکل تابع است که آن را تابع یک متغیره و به طور خلاصه تابع نامیدیم. وقتی دامنه تابع حاصلضرب ۲ یا چند مجموعه باشد، تابع به دست آمده را یک تابع ۲ یا جند متغیره می‌نامیم.

برای مثال تابع‌های جمع و ضرب توابع دو متغیره‌اند. زیرا:

$$+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \qquad \times : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$+(x_۱, x_۲) = x_۱ + x_۲$ جمع معمولی $\qquad \times(x_۱, x_۲) = x_۱ + x_۲$ ضرب معمولی

$$+(۳, ۵) = ۸, +(۴, -۲) = ۲ \qquad \times(۵, ۳) = ۱۵, \times(۴, -۲) = -۸$$

در حساب، به جای نوشتن $+(x_۱, x_۲)$ که همان نماد $f(x_۱, x_۲)$ است، و در اینجا نام و علامت تابع $+$ است، می‌نویسند $x_۱ f x_۲$.

۴-۳ تساوی توابع

دو تابع f و g را در صورتی مساوی نامیم و می‌نویسیم $f = g$ که شرایط ذیل برقرار باشد.

۱) $\mathrm{dom} f = \mathrm{dom} g$

۲) به ازای هر x متعلق به دامنهٔ مشترک، $f(x) = g(x)$.

لذا برای اثبات تساوی دو تابع می‌بایست شرایط (۱) و (۲) را محقق سازیم. دو تابع متساوی در واقع یکسان بوده و به عنوان فرآیند بر یک مجموعه مثل هم عمل می‌کنند.

به عنوان مثال توابع

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = \sin x$$

و $g : \mathbb{R} \longrightarrow [-۱, ۱]$ با ضابطه $g(x) = \sin x$ دو تابع مساوی هستند، گرچه همدانه‌های نابرابر دارند.
به مثال دیگر توجه می‌کنیم: توابع

$$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^{\geq ۰}$$
$$g(x) = \sqrt{x^۲}$$
$$h : [۰, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}^{\geq ۰}$$
$$g(x) = |x|$$

مساوی نیستند، گرچه ضابطه‌های تعریف یکسانی دارند؛ زیرا دامنه‌های آنها نابرابر است.

نماد و مفهوم تابع به شکل امروزی انتزاعی گردد. اینگونه علایم مرسوم و معمول بوده‌اند. تحقیق و پژوهش در مباحث ریاضیات، به عنوان زیر ساختاری که همه‌ی شاخه‌های ریاضیات را در برگیرد و به صورتی سامان یافته فرمولبندی و تعریف گردد در دوران قرون مفاخر و توسط ریاضیدانانی همچون، دیوید هیلبرت، خدا آفرید فرگه، برتراند راسل انجام گرفته است. کوشش این دانشمندان براین بوده است تا بتوانند از طریق تعریف مبانی ریاضیات، کل دانش ریاضیات را به عنوا نتایج منطقی آن تعریف و سازماندهی نمایند. دیدوید هیلبرت آلمانی درکتاب تحت عنوان مبانی ریاضیات منتشرکرد. راسل ردایتهد ریاضیدانان انگلیسی کتابی در سه جمله تحت عنوان اصول طبیعی فلسفه ریاضی منتشر کردند و سعی کردند که منطق را به عنوان اصلی‌ترین بنیان ریاضیات معرفی کنند.

به آسانی می‌توان توابع دو متغیره دیگری تعریف کرد:

$$f(x, y) = x - y + ۱, \qquad x, y \in \mathbb{R}$$
$$f(x, y) = x^۲ - y^۲ + ۲, \qquad x, y \in \mathbb{R}$$
$$h(x, y) = x^۲ y^۲ - xy, \quad x, y \in \mathbb{R} - \{۱\}$$
$$t(x, y) = \frac{xy}{x^۲ + y^۲}, \qquad x, y \in \mathbb{R} - \{۰\}$$

در اینجا به جای آنکه بنویسیم $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ می‌نویسیم $x, y \in \mathbb{R}$، با ارائه ضابطه و نوشتن آنکه $(x, y) \in A \times B$ و یا در حالت خاصی $A = B$، $x, y \in A$، تابع کاملاً مشخص است. البته به شرط آنکه برای هر $(x, y) \in A \times B$، $f(x, y)$ مشخص و منحصربه فرد باشد(تعریف تابع).

تکلیف. با استفاده از اعمال جبری و مفاهیم مثلثاتی (sin، cos، tan و cotan) ۱۰ تابع دو متغیره بسازید.

۳-۵ توابع حقیقی (مقدار)

به لحاظ برد توابع، توابع مطرح شده در ریاضیات را می‌توان به دو دسته بزرگ تقسیم کرد.

توابع حقیقی مقدار[1]

هرگاه برد تابع $\mathbb{R}$ یا زیرمجموعه‌ای از $\mathbb{R}$ باشد. تابع را یک **تابع حقیقی مقدار** و یا اختصاراً یک **تابع حقیقی** می‌نامیم. پس شکل کلی تابع حقیقی به صورت

$$f : A \longrightarrow \mathbb{R}$$

می‌باشد. A؛ یعنی دامنه تابع **لزوماً** زیر مجموعه $\mathbb{R}$ نمی‌باشد.

۳-۵-۱ مثال فرض کنیم $M_{۲\times ۲}$ مجموعه ماتریس‌های ۲×۲ با درایه‌های حقیقی باشد. تابع

$$f : M_{۲\times ۲} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$f(A) = |A| \qquad \text{با ضابطه تعریف}$$

یک تابع حقیقی است. برخی مقادیر آن را محاسبه می‌کنیم

$$f(\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & -۱ \end{bmatrix}) = -۱, \quad f(\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۳ & ۴ \end{bmatrix}) = ۵$$

$$f(\begin{bmatrix} ۱۰ & ۲۰ \\ ۱۰ & ۰ \end{bmatrix}) = ۲۱۰,$$

این تابع را **تابع اثرنیان** می‌نامند.

۳-۵-۲ مثال فرض کنیم $C[۰, \pi]$ مجموعه توابع پیوسته بر بازه‌ی $[۰, \pi]$ بوده باشد، تابع F با ضابطه تعریف

$$F(g) = \text{Max}g \ (= \text{Max}\{g(x) ۱ ۰ \leq x \leq \pi\})$$

یک تابع حقیقی است.

1) real-valued function

تکلیف. به ازای انتخاب چند مقدار متعلق به $C[۰,۱]$ چند مقدار تابع را محاسبه کنید. فی‌المثل $g(x) = \sin x \in C[۰,\pi]$.

$$F(g) = \mathrm{Max}_{۰\leq\leq\pi}\, g(x) = ۱$$

ب) توابع مختلط[۲]

هر تابع که برد آن زیرمجموعه $\mathbb{C}$، مجموعه اعداد مختلط، باشد یک تابع **مقدار مختلط**[۳] یا به اختصار یک **تابع مختلط** نامیده می‌شود. برای نمونه تابع

$$f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$f(x+iy) = x - iy$$

یک تابع مختلط است. دامنه یک تابع مختلط لزوماً زیرمجموعه $\mathbb{C}$ نمی‌باشد. توابع حقیقی موضوع اصل آنالیز حقیقی و توابع مختلط موضوع آنالیز مختلط می‌باشد که در دروس آتی با آنها درگیر خواهد بود. توابع حقیقی خود نیز به لحاظ شکل ضابطه تعریف آنها به چند دسته تقسیم می‌شوند.

تابع جبری به تابعی اطلاق می‌شود که مقدار آن بر حسب متغیر x (عضو دامنه) با استفاده از اعمال اصلی حاسب به دست می‌آید.

بنابراین هر یک از توابع ذیل تابع جبری می‌باشند:

$$f(x) = ۲x^۲ - gx + ۱, \qquad x \in \mathbb{Z}$$

$$t(x) = ۲x^۲ - ۳x + ۱, \qquad x \in \mathbb{Q}$$

$$h(x) = ۵x^۷ - ۶x - \frac{۱}{۱۱}, \qquad x \in \mathbb{R}$$

$$u(x) = \frac{۲x^۲ - ۱}{x^۲ + ۱}, \qquad x \in [۰,۱]$$

2) Complex Valued function 3) -

پس تابع را که جبری نباشد یک تابع **غیر جبری** (متعالی) می‌نامیم. برای نمونه توابع مثلثاتی توابعی غیر جبری هستند:

$$f(x) = \sin ۲x + ۱, \qquad g(x) = \cos x^۲ - \cos x - \tan x$$

قرارداد در مثال‌های اخیر دامنه توابع f و g را ذکر نکرده‌ایم. در واقع توابع f و g اخیر تابع نیستند. چرا که **هر تابع با ضابطه و دامنه‌اش مشخص می‌گردد.**

لیکن بر طبق یک قرارداد هرگاه یک تابع فقط با ضابطه‌اش معرفی گردد مرادمان از دامنه آن وسیعترین مجموعه‌ای (وسیعترین زیرمجموعه $\mathbb{R}$) است که برای هر عضو آن مجموعه آن ضابطه مقدار شخصی به دست دهد.

برای مثال هرگاه از ضابطهٔ

$$f(x) = \frac{۱}{x - ۱}$$

به عنوان یک تابع یاد گردد. منظورمان تابع

$$f(x) = \frac{۱}{x - ۱}, \qquad x \in \mathbb{R} - \{۱\}$$

می‌باشد. زیرا **تقسیم بر صفر در ریاضیات تعریف نمی‌گردد.**

پس در مثالهای فوق‌الاشاره دامنه تابع f برابر $\mathbb{R}$ و دامنه تابع g برابر $\mathbb{R} - \{۰\}$ می‌باشد. (چرا؟)

۳-۵-۳ تابع همانی با هر مجموعه همواره می‌توان یک تابع (و فقط یک تابع) به شکل زیر نسبت داد.

$$f: \quad A \longrightarrow A$$
$$f(x) = x$$

این تابع را تابع همانی یا دامنه A یا تابع همانی بر A نامیده و غالباً به A i) identity function I_A و یا ۱_A نشان می‌دهیم. پس تابع همانی هر مقدار دامنه را به همان مقدار نقش می‌کنند. در دروس بعدی ملاحظه خواهیم کرد که نقش تابع همانی در جبر توابع نقش کلیدی است، همانگونه که عدد ۱ در جبر اعداد نقش اساسی را بازی می‌کند.

i) identity function) ،

۳-۵-۴ تابع ثابت فرض کنیم A یک مجموعه و C شئی ثابت بوده باشد. تابع

$$f: \quad A \longrightarrow \{C\}$$
$$f(x) = X$$

را **تابع ثابت**[4] **با مقدار (ثابت** C**)** یا اختصاراً تابع ثابت C می‌نامیم. پس تابع ثابت هر مقدار دامنه را به یک مقدار ثابت نقش می‌کند.

۳-۵-۵ دنباله[5] هر تابع که دامنه آن $\mathbb{N}$، مجموعه اعداد طبیعی، باشد یک **دنباله** نامیده می‌شود. هرگاه دامنه تابع زیرمجموعه‌ای متناهی و محدود از $\mathbb{N}$ باشد، تابع را یک دنباله متناهی می‌نامیم.

(الف)
$$f: \quad \mathbb{N} \longrightarrow Q$$
$$f(n) = \frac{۱}{n}$$

(ب)
$$g: \quad \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$g(n) = \sqrt{n}$$

(ج)
$$h: \quad \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$h(n) = \sqrt{n^۲ + ۱}$$

(د)
$$a: \quad \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$a(n) = \frac{۱}{۲^n - ۱}$$

(ه)
$$b: \quad \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$b(n) = ۲n + ۱$$

یک دنباله هستند. برخی مقادیر دنباله a را می‌نویسیم:

$$a(۱) = ۱, a(۲) = \frac{۱}{۲}, a(۳) = \frac{۱}{۴}, a(۴) = \frac{۱}{۸}, a(۵) = \frac{۱}{۱۶}$$

در عمل، به منظور اختصار در نوشتار، $a(۱)$ را با نماد $a_۱$، $a(۲)$ را با نماد $a_۲$ و به طور کلی $a(n)$ را با نماد a_n نشان می‌دهیم. با توجه به ضابطه تعریف این دنباله $a_n = a(n) = \frac{۱}{۲^n - ۱}$ را **جمله** nام یا **جمله**

4) C حرف اول Constant 5) Sequence

عمومی دنباله می‌نامیم. پس مقادیر این تابع را با این نمادگذاری به صورت کلی

$$۱)a_۱, a_۲, a_۳, \cdots, a_n, \cdots$$

و یا به صورت مقداری

$$۲)\, ۱, \frac{۱}{۲}, \frac{۱}{۴}, \frac{۱}{۸}, \frac{۱}{۱۶}, \cdots, \frac{۱}{۲^{n-۱}}, \cdots$$

می‌توانیم نشان دهیم. وقتی اشیاء یا اعدادی به صورت زنجیروار همانند شکل (۲) ارائه شوند که در آن ترتیب رعایت شده و تقدم و تأخر رعایت گردد در واقع دنباله‌ای با مقادیر آن اشیاء یا آن اعداد مطسح نظر بوده است. به عبارت دیگر فرض کنیم زنجیره‌ی اعداد ردیف (۲) به **همین ترتیب** داده شده باشد؛ در این صورت مراد دنباله‌های است که در آن ۱ مقدار دنباله به ازای عدد ۱ (اولین عدد طبیعی)، $\frac{۱}{۲}$ مقدار دیگر دنباله به ازای عدد ۲ (دومین عدد طبیعی) و نظایر اینها می‌باشد:

$$\begin{array}{ccccccc} ۱ & ۲ & ۳ & ۴ & \cdots & n & \cdots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \\ ۱ & \frac{۱}{۲} & \frac{۱}{۴} & \frac{۱}{۸} & \cdots & \frac{۱}{۲^{n-۱}} & \cdots \end{array}$$

صورت مفصل فوق را که در آن ردیف اول، دامنه دنباله ($\mathbb{N}$) و در ردیف دوم هر مقدار دنباله به ازای هر عدد طبیعی در زیر آن نوشته شده است به شکل ساده و اختصاری

$$۱, \frac{۱}{۲}, \frac{۱}{۴}, \frac{۱}{۸}, \frac{۱}{۱۶}, \cdots \frac{۱}{۲^{n-۱}}, \cdots$$

می‌نویسیم؛ مجموعه اعداد اصلی (دامنه دنباله) در ذهن خود با مجموعه اعداد فوق به آسانی قابل تطبیق هستند.

بر عکس هرگاه اشیایی و یا اعدادی را به صورتی مرتب (با حفظ تقدم و تأخر) ردیف کنیم، در واقع یک دنباله در دست داریم:

$$\begin{bmatrix} ۱ & -۱ \\ ۰ & ۲ \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} ۱ & -۱ \\ ۰ & ۲ \end{bmatrix}^۲, \begin{bmatrix} ۱ & -۱ \\ ۰ & ۲ \end{bmatrix}^۳, \cdots, \begin{bmatrix} ۱ & -۱ \\ ۰ & ۲ \end{bmatrix}^n, \cdots$$

این نمایش دنباله‌ای از ماتریس‌ها را نشان می‌دهد که در آن

$$A_۱ = \begin{bmatrix} ۱ & -۱ \\ ۰ & ۲ \end{bmatrix}, A_۲ = \begin{bmatrix} ۱ & -۱ \\ ۰ & ۲ \end{bmatrix}^۲, \cdots, A_n = \begin{bmatrix} ۱ & -۱ \\ ۰ & ۲ \end{bmatrix}^n, \cdots$$

ممکن است قانون دنباله (ضابطه تعریف دنباله) همانند مثال‌های فوق مشهود نباشد و یا اساساً دنباله فاقد قانون (ضابطه) بوده باشد:

الف) ۱, ۱/۰۱, ۱/۲۱, ۱/۰۰۲, ۱/۳۱, $\cdots$

ب) ۱/۴, ۱/۴۱, ۱/۴۱۳, ۱/۴۱۳۸۰, ۱/۴۱۳۸۹, ۱/۴۱۳۸۸۲, $\cdots$

در مطالعه و کار با اینگونه دنباله تا هر جا که حاجت است می‌بایست جمله با شماره مربوطه را به **طریقی** محاسبه و در دست داشت . دنباله (ب) نمایش جذر ۲ تا ۶ رقم اعشار می‌باشد.

برخی دنباله‌ها قانونمند (دارای ضابطه) هستند ولی در بدو امر نمایان نمی‌باشد:

$$-۱, ۱, ۰, ۱, ۱, ۲, ۳, ۵, ۸, ۱۳, ۲۱, ۳۴, ۵۵, \cdots$$

در این دنباله، که به دنباله فیبوتاتچی[6] مشهور است، ضابطه دنباله بر ما فعلاً معلوم نیست. امّا با اندک تاملی معلوم می‌شود که هر جلمه دنباله (مقدار تابع) حاصل جمع دو جمع ماقبل آن است.

$$۰ = -۱ + ۱$$

$$۱ = ۱ + ۰,\ ۲ = ۱ + ۱,\ ۳ = ۱ + ۲,\ ۵ = ۲ + ۳,\ ۵۵ = ۲۱ + ۲۴$$

و به طور کلی $(*) a_{n+۲} = a_n + a_{n+۱}$

اصطلاحاً چنین دنباله‌ای را یک **دنباله تراجعی** یا یک دنباله بازگشتی می‌نامند. زیرا هر دنباله یا ارجاع به **دو یا چند جمله قبلی** و به کمک روابطی جبری به دست می‌آید. با داشتن رابطه تراجعی (*) و دو جمله اول دنباله، همه جملات دنباله را می‌توان به آسانی به دست آورد.

گاهی اوقات جملات دنباله را به ترتیب درون یک پرانتز درج می‌کنیم. مانند دنباله

$$(۱, ۰, ۲, ۰, ۰, ۳, ۰, ۰, ۰, ۴, ۰, ۰, ۰, ۰, \cdots)$$

6)

آیا می‌توانید جمله ۱۵ هم این دنباله را مشخص کنید؟

با نماد قبلی منظور دنباله اعداد

$$(۱, ۰, ۲, ۰, ۰, ۳, ۰, ۰, ۰, ۴, ۰, ۰, ۰, ۰, \cdots)$$

است که درآن ۱ جمله اول، ۰ جمله دوم؛ ۲ جمله سوم، ۰ جمله چهارم، ۰ جمله پنجم، ۳ جمله ششم و حتی علیهذا می‌باشد. وقتی دنباله با پرانتز نشان داده می‌شود بهتر آن را به مشابه تصحیحی از زوج مرتب تلقی کرد. مطالعه اینگونه دنباله‌ها در جبرهای پیشرفته‌تر عالی میسر می‌باشد.

نکته: گیریم:

$$f_۱(x) = ۱, f_۲(x) = x, f_۳(x) = x^۲, f_۴(x) = x^۳, \cdots$$

چهار تابع مفروض باشند. مشابه اینها ۵ تابع دیگر (با همان ضابطه‌ها!) معرفی کنید. بدین ترتیب دنباله‌ای از توابع حاصل می‌شود

$$(*)\ f_۱, f_۲, f_۳, f_۴, f_۵, \cdots, f_n, \cdots$$

که در آن

$$(n = ۱, ۲, \cdots) \qquad f_n(x) = x^n$$

توجه داشته باشیم که مقادیر دنباله (جملات دنباله) هر چیزی می‌توانند بوده باشند، همانگونه که در تعریف تابع هیچ محدودیتی برای همدانه تابع قائل نشده‌ایم. ردیف ($*$) را **دنباله‌ای از توابع** می‌نامیم.

نکته: هر موقع یک سری از اشیاء را از چپ به راست به ترتیب ارائه کنیم. در واقع یک دنباله را ملحوظ داشته‌ایم. وقتی یک سری اشیاء را با مجموعنه مرتب اعداد طبیعی و یا زیرمجموعه‌ای مرتب از اعداد طبیعی بشماریم یک دنباله (متناهی و یا نامتناهی) ساخته می‌شود.

هر دو دنباله آشنای شما دنباله‌ای حسابی و هندسی از اعداد هستند:

۱) $۵, ۸, ۱۱, ۱۴, ۱۷, ۲۰, ۲۳, \cdots$

۲) $-۲, ۲, ۶, ۱۰, ۱۴, ۱۸, ۲۲, \cdots$

۳) $۳, ۶, ۱۲, ۲۴, ۴۸, ۹۶, ۱۹۲, \cdots$

۴) $۵, -\frac{۵}{۲}, \frac{۵}{۴}, -\frac{۵}{۸}, \frac{۵}{۱۶}, -\frac{۵}{۳۲}, \cdots$

نرم کلی دنباله حسابی چگونه است؟

صورت کل یک دنباله هندسی چگونه است؟

چه موقع یک دنباله حسابی افزایشی است؟

در چه شرایطی یک دنباله هندسی افزایشی و درچه شرایطی کاهشی است؟

تکلیف. سه دنباله حسابی افزایشی و چهار دنباله هندسی کاهشی بسازید. چرا دنباله‌های (۳) و (۴) را هندسی می‌نامید؟ آیا این مفهوم ارتباطی با اشکال هندسی دارد؟

۳-۶ تصویر مستقیم و تصویر عکس

تعریف ۲. فرض کنیم $f : X \longrightarrow Y$ یک تابع و $A \subseteq X$. زیرمجموعه‌ای از Y متشکل از مقادیری از تابع که متناظر اعضای A هستند، تصویر A تحت f نامیده و به $f[A]$ نشان می‌دهیم. به زبان نمادی

$$f[A] = \{f(x)|x \in A\}$$

لهذا $f[A]$ مجموعه مقادیر تابع f_A،یعنی تحت f بر A است.

مشابهاً نظیر هر $B \subseteq Y$ می‌توانیم زیرمجموعه‌ای از X را تعریف کنیم.

$$f^{-۱}[B] = \{x \in X|f(x) \in B\}$$

$f^{-۱}[B]$ را **تصویر عکس** B می‌نامیم. پس $f^{-۱}[B]$ متشکل از اعضایی از دامنه تابع f است که مقدار تابع به ازای آن اعضا به B تعلق دارد یا به عبارت دیگر اعضایی از دامنه که f آنها را به عضوی از B نقش

می‌کند.

پرسش‌های کلیدی. هرگاه $B = f[A]$ اختیار کنیم تصویر عکس آن یعنی $f^{-1}[f[A]]$ چه ارتباطی با A دارد؟

یا آنکه هرگاه $A = f^{-1}[B]$ بگیریم، تصویر آن یعنی $f[f^{-1}[B]]$ چه ارتباطی با B دارد؟

می‌توانیم موضوع را ضمن مثالهایی بررسی کرده و به حدسیه سازی بپردازیم. تابع f را بانمودار مجموعه‌ای در نظر می‌گیریم:

شکل ۱ـ۲

برای $A_1 = \{1, 2, \cdots\}$ داریم

$$f[A_1] = \{3\}$$

برای $A_2 = \{1, 2, \}$ داریم

$$f[A_2] = \{3\}$$

حال $f^{-1}[\{3\}]$ را محاسبه می‌کنیم:

$$f^{-1}[\{3\}] = \{1, 2, -1\}$$

یعنی $f^{-1}[f[A_1]] = \{1, 2, -1\}$ و $f^{-1}[f[A_2]] = \{1, 2, -1\}$. در نتیجه در این مثال، $A_2 \subseteq f^{-1}[f[A_2]]$ و $A_1 \subseteq f^{-1}[f[A_1]]$ آیا اینها احکامی کلی هستند؟

هرگاه $B^1 = \{7, 5, 6\}$، $f[f^{-1}[B^1]]$ چه ارتباطی با B^1 دارد؟

۳-۶-۱ قضیه. فرض کنیم $f : X \longrightarrow Y$ یک تابع، $A \subseteq X$ و $B \subseteq Y$. در این صورت

الف) $A \subseteq f^{-1}[f[A]]$

ب) $f[f^{-1}[B]] \subseteq B$

برهان. Dبرای اثبات (الف) فرض کنیم $x \in A$ عضوی دلخواه باشد. پس $f(x) \in f[A]$. در نتیجه طبق تعریف $x \in f^{-1}[f[A]]$ و لذا (الف) برقرار است.

(ب) فرض کنیم $y \in f[f^{-1}[B]]$. لذا y نقش عضوی از $f^{-1}[B]$ مانند x است.

$$y = f(x),\ x \in f^{-1}[B]$$

امّا طبق تعریف تصویر عکس، چون $x \in f^{-1}[B]$. $f(x) \in B$. در نتیجه $y \in B$.

پرسش. تابع f چه ویژگی باید داشته باشد که در قضیه فوق جزئیت‌های مجموعه‌ای به تساوی تبدیل گردد؛ به عبارت دیگر تحت چه شرایطی

$$A = f^{-1}[f[A]]$$

و

$$f[f^{-1}[B]] = B$$

به مثال صفحات قبل توجه کنید که در این مثال تساویها برقرار نیستند. تابع f چه کاستی‌هایی دارد؟

دراین مثال نقش اعضای متمایز A یکسان است.

$$f(1) = f(2) = f(-1) = 3$$

اصطلاحاً گویند چنین تابعی **یک‌به یک** نمی‌باشد. همچنین عضو ۱ از همدانه توسط هیچ عضوی از دامنه پوشش داده نشده است.

اصطلاحاً گوئیم f **پوشا** نمی‌باشد.

۳-۶-۲ قضیه. فرض کنیم $f : X \longrightarrow Y$ یک تابع $A_1, A_2 \subseteq X$ و $B_1, B_2 \subseteq Y$. در این صورت

الف) $f[X] = \operatorname{rang} ef$

ب) $f[A_1 \cup A_2] = f[A_1] \cup f[A_2]$

ج) $f[A_1 \cap A_2] \subseteq f[A_1] \cap f[A_2]$

د) $f[A_1] - f[A_2] \subseteq f[A_1 - A_2]$

هـ) $A_1 \subseteq A_2 \Longrightarrow f[A_1] \subseteq f[A_2]$

و) $f[\phi] = \phi$

برهان. (ج) و (د) را اثبات می‌کنیم و اثبات بقیه احکام به عنوان تمرین به دانشجو محول می‌شود.

(ج) فرض کنیم $y \in f[A_1 \cap A_2]$. لذا حداقل یک x هست که $y = f(x)$ و $x \in A_1 \cap A_2$. پس $x \in A_1$ و $x \in A_2$. طبق تعریف $y \in f[A_1]$ و $y \in f[A_2]$. در نتیجه $y \in f[A_1] \cap f[A_2]$.

(د) فرض کنیم $u \in f[A_1] - f[A_2]$. پس $u \in f[A_1]$ و $u \notin f[A_2]$. در نتیجه $u = f(a)$ که $a \in A_1$ (حداقل یک چنین aی وجود دارد). به علاوه $a \notin A_2$، چه در غیر این صورت $f(a) = u \in f[A_2]$ که خلاف فرض است. پس $a \in A_1 - A_2$. از اینجا $f(a) = u \in f[A_1 - A_2]$. پس $x \in f^{-1}[B] \cap f^{-1}[B^1]$

چون استدلال برگشت‌پذیر است، پس حکم ج به شکل تساوی برقرار است.

اثبات سایر احکام سرراست بوده و به عنوان تمرین به دانشجو محول می‌شود.

۳-۷ ترکیب (ضرب) توابع

در این بخش نشان می‌دهیم که چگونه از دو تابع، که به دنبال هم تعریف شده باشند، می‌توان تابع جدیدی ساخت. منظورمان از واژه «به دنبال هم» بودن چیست؟ فرض کنیم $g : X \longrightarrow Y$ و $f : Y \longrightarrow Z$

دو تابع مفروض باشند؛ در اینجا همدانه g برابر Y (یا زیرمجموعه‌ای از Y!) است. این وضعیت به ما این امکان را می‌دهد که برای هر مقدار g مانند $g(x)$، مقداری از f، یعنی $f(g(x))$ را مورد توجه قرار دهیم. اصطلاحاً گوییم f و g به دنبال هم تعریف شده‌اند؛ یا آنکه f و g **قابل ترکیب** (ضرب) می‌باشند. نماد ساده‌تر این وضعیت را می‌توانیم چنین نشان دهیم

$$X \xrightarrow{g} Y \xrightarrow{f} Z$$

$$z \rightsquigarrow g(x) \rightsquigarrow f(g(x))$$

فلذا یک تابع جدید به دست آورده‌ایم:

$$X \xrightarrow{f \circ g} Z$$

$$x \rightsquigarrow f(g(x))$$

این تابع را به $f \circ g$ نشان داد، آن را ترکیب f و g می‌نامیم. پس ضابطه‌ای $f \circ g$ چنین است

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

چون g و f تابع هستند، $f \circ g$ نیز تابع است، زیرا برای هر $x \in X$، $g(x)$ مشخص و منحصر به فرد است. در نتیجه $f(g(x))$ نیز مشخص و منحصر به فرد است.

۸-۳ تابع و رابطه

فرض کنیم $f : A \longrightarrow B$ یک تابع باشد. پس برای هر $x \in A$، $f(x) \in B$ مشخص و یکتا است. البته ممکن است برای $x_1, x_2 \in A$ $(x_1 \neq x_2)$. $f(x_1) = f(x_2) \in B$ اتفاق بیفتد. می‌توانیم **مجموعه جدیدی** از زوجهای مرتب بسازیم

$$\{(x, f(x) | x \in A\}$$

چون همواره $f(x) \in B$، این مجموعه یک زیرمجموعه حاصلضرب دکارتی A و B یعنی $A \times B$ است؛ نتیجه آنکه با هر تابع $f : A \longrightarrow B$ یک در یک زیرمجموعه مشخص و معین از $A \times B$ در دست داریم

$$\{(x, f(x))\} \subseteq A \times B$$

گاهی همین زیرمجموعه را، به دلیل ارتباطش با f، به f نشان می‌دهند.

$$f = \{(x, f(x))\} \subseteq A \times B$$

و گویند که هر تابع یک زیرمجموعه $A \times B$ است با این شرط که **برای هر عضو** $a \in A$، زوج مرتب $(a, b) \in A \times B$ یک بار و فقط یک بار به عنوان عضوی از $A \times B$ رخ دهد. وقتی این شرط را حذف کنیم به مفهوم رابطه می‌رسیم.

پس هر تابع $f : A \longrightarrow B$ یک رابطه از A در B است؛ امّا هر رابطه از A در B یک تابع نمی‌باشد (چرا؟)

وقتی با توابع حقیقی سروکار داریم مناسب‌تر آن است که به توابع از دیدگاه رابطه‌ها بنگریم، امّا چون همه توابع از نوع توابع حقیقی نیستند، دیدگاه **فرآیندی** در حالت کلی کارآتر می‌باشد.

مثال. در شکل زیر نمودارهای دو تابع حقیقی f و g رسم شده‌اند. محاسبات $(f \circ g)(x)$ و $(g \circ f)(x)$ نشانگر آن است که این دو با هم مساوی نیستند. لذا

$$f \circ g \neq g \circ f$$

یعنی ترکیب (ضرب) توابع در حالت کلی جابه جایی نمی‌باشد.

۳-۹ توابع دوسویی

۳-۹-۱ تعریف. تابع $f : X \longrightarrow Y$ را **پوشا** نامیم هرگاه

$$f[X] = Y$$

بنابراین f وقتی پوشا است که هر عضو y تصویر (نقش) حداقل یک عضو A باشد. تابع

$$f : \quad \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$f(x) = x^{۲}$$

پوشا نیست. امّا تابع

$$g: \quad \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^{\geq 0}$$
$$g(x) = x^2$$

پوشاست، گرچه ضابطه تعریف دو تابع یکسان است.

۳-۹-۲ تعریف. تابع $f : X \longrightarrow Y$ را **یک‌به یک** نامیم هرگاه از $x_1 \neq x_2$ نتیجه شود $f(x_1) \neq f(x_2)$. به عبارت دیگر f وقتی یک‌به یک است که اعضای متمایز دامنه را به اعضایی متمایز از همدانه بنگارد.

چون گزاره شرطی $p \Longrightarrow q$ با عکس نقیضش بعضی $\rceil q \Longrightarrow \rceil p$ هم‌ارز است پس می‌توانیم بگوییم که f وقتی یک‌به یک است که از گزاره نمای $f(x_1) = f(x_2)$، گزاره‌نمای $x_1 = x_2$ نتیجه شود.

دستورالعمل پوشایی و یک‌به‌یک بودن

الف) برای اثبات پوشا بودن تابعی که با ضابطه تعریف آن مشخص شده است، باید بتوان از حل معادله $f(x) = y$ یا هر y معلوم حداقل یک جواب برای x به دست آورد.

برای مثال، در تابع

$$f: \quad \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$f(x) = x^2$$

هرگاه $y = -z \in \mathbb{R}$ اختیار شود معادله $-2 = x^2$ در $\mathbb{R}$ فاقد جواب است. پس تابع پوشا نیست.

امّا برای تابع

$$g: \quad \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^{\geq 0}$$
$$g(x) = x^2$$

چنین وضعی حاکم نمی‌باشد؛ و به آسانی معلوم می‌شود که g پوشا است (چرا؟)

ب) برای اثبات یک‌به یک بودن یک تابع باید بتوانیم برای هر x_1 و x_2 دلخواه و متعلق به دامنه از تساوی $f(x_1) = f(x_2)$، تساوی $x_1 = x_2$ را نتیجه‌گیری کنیم.

در مثال فوق الاشاره g، داریم

$$g(x_1) = x_1^2,\ g(x_2) = x_2^2$$

ولی از تساوی $x_1^2 = x_2^2$ نمی‌توانیم تساوی $x_1 = x_2$ را نتیجه بگیریم، چه آنکه از تساوی فوق فقط می‌توان نتیجه گرفت که $x_1 = x_2$ یا $x_1 = -x_2$. وقتی نمودار یک تابع حقیقی مقدار رسم می‌شود، به آسانی و به گونه‌ای مشهودی پوشایی یا یک‌به یک بودن تابع بر ما معلوم می‌شود.

$$g:\quad \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^{\geq 0}$$
$$g(x) = x^2$$

g پوشا است، امّا یک‌به‌یک نیست

$$f:\quad \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$f(x) = x^2$$

f نه پوشا است و نه یک‌به یک

۳-۹-۳ نکته مهم. «یک‌به یک بودن» ویژگی ذاتی تابع است و به ضابطهٔ عملکرد آن بستگی مستقیم دارد، در حالی که «پوشایی» ویژگی ذاتی تابع محسوب نمی‌شود و به همدانه تابع بستگی دارد. در مثال تابع t، هرگاه

$$t_1:\quad \mathbb{R}^{\geq 0} \longrightarrow \mathbb{R}^{\geq 0}$$
$$t(x) = \sqrt{x}$$

تعریف گردد، به آسانی معلوم است که t_1 یک‌به یک و پوشا است. در واقع بخشی از همدانه که پوشیدنمی‌شده برداشته شد. (نیمه منفی اعداد حقیقی) و بدینسان تابع t_1 حاصل شده است که بالبداهه پوشا است. چون ضابطهٔ t و ضابطه t_1 یکسان و دامنه آنها نیز یکی است می‌توان این دو تابع را یک تابع محسوب کرد.

۳-۱۰ تابع معکوس یک تابع

می‌دانیم که معکوس هر عدد غیر صفر a، عددی است مانند b به طوری که

$$ba = ab = ۱$$

مشابهاً می‌توانیم برای یک تابع مانند f معکوس آن را تعریف کنیم. در اینجا تابع همانی نقش عدد ۱ را در مجموعه توابع بازی می‌کند.

تعریف ۵. فرض کنیم $f : A \longrightarrow B$ یک تابع باشد. تابع $g : B \longrightarrow A$ را تابع **معکوس** f نامیم در صورتی که

$$f \circ g = ۱_B, \qquad g \circ f = ۱_A$$

تابع مکوس، در واقع اثر خود تابع را خنثی کرده به طوری که در ترکیب با هر عضو شروع کنیم در نهایت به همان عضو می‌رسیم:

$$g \circ f = ۱_A$$

$$g(f(x)) = ۱_A(x) = x$$

سؤال: آیا هر تابعی دارای تابع معکوس است؟ تابع $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^{\geq ۰}$ با ضابطه $f(x) = x^۲$ را در نظر می‌گیریم. از آنجا که عمل معکوس، مجذور کردن، جذر گرفتن است، تابع

$$g : \mathbb{R}^{\geq ۰} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$g(x) = \sqrt{x}$$

را در نظر می‌گیریم.

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^{۲}) = \sqrt{x^{۲}} = |x|$$

که در حالت کلی تساوی $|x| = x$ برقرار نمی‌باشد. لذا f دارای تابع معکوس نخواهد بود.

امّا تابع

$$t = \quad \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$t(x) = x^{۳}$$

دارای تابع معکوس $u(x) = \sqrt[۳]{x}$ است (چرا؟)

$$t(u(x)) = t(\sqrt[۳]{x}) = (\sqrt[۳]{x})^{۳} = x = ۱_{\mathbb{R}}(x)$$

$$u(t(x)) = u(x^{۳}) = \sqrt[۳]{x^{۳}} = x = ۱_{\mathbb{R}}(x)$$

چه تفاوتی ذاتی بین t و f وجود داشته که سبب داشتن تابع معکوس برای t و نداشتن تابع معکوس برای f شده اتس؟

۳-۱۰-۱ معکوس چپ و معکوس راست تابع g را تابع **معکوس چپ** تابع $f : A \longrightarrow B$ تابع هرگاه

$$g \circ f = ۱_A$$

مشابهاً تابع h، $h : B \longrightarrow A$ را تابع **معکوس راست** تابع f نامیم هرگاه

$$f = h = ۱_B$$

تکلیف. ثابت کنید که تابع معکوس یک تابع در صورت وجود منحصر به فرد است.

۳-۱۱ توابع از دیدگاه کلی

تا اینجا، توابع را چنان انگاشته‌ایم که در **یک نقطه** خاص بررسی می‌شده‌اند و یا در یک بحث با **یک تابع** سروکار داشته‌ایم. در این بخش ما با توابع به گونه‌ای سروکار داریم که به عنوان یک «کل» با دیگر توابع ترکیب

می‌شوند و به جای آنکه در پی پرسش‌هایی از این دست باشیم که « تابع f نقطه x را به کجا می‌نگارد؟ ما به دنباله اثر کلی و سراسری f هستیم. کار را با تشخیص توابع یک به یک از روی تعامل که با دیگر توابع دارند شروع می‌کنیم. یادآوری می‌کنیم که هرگاه S مجموعه‌ای دلخواه بوده باشد $\mathbb{1}_S : S \longrightarrow S$، یعنی تابع است با ضابطه $\mathbb{1}_S(x) = x$ (برای هر $x \in S$).

چنین دیدگاه کلی و سراسری از توابع دیدگاه کاتگوریکی نام دارد که بنعث از نظریه کاتگوری است که در جبر عالی‌تر مورد مطالعه و پژوهش قرار می‌گیرد.

۳-۱۱-۱ قضیه. فرض کنیم $f : A \longrightarrow B$ یک تابع باشد. در این صورت f یک به یک است. اگر و فقط اگر برای هر مجموعه C و توابع $g : C \longrightarrow A$ و $h : C \longrightarrow A$ به قسمی که $f \circ g = f \circ h$، نتیجه گردد که $g = h$. (حذف از چپ !).

برهان. ($\Leftarrow$) فرض کنیم که f یک به یک و C یک مجموعه و رابطه $f \circ g = f \circ h$ برای توابع $g : C \longrightarrow A$ و $h : C \longrightarrow A$ برقرار باشد. در این صورت برای هر $x \in C$،

$$f(g(x)) = f(h(x))$$

چون f یک به یک است نتیجه می‌گیریم که

$$g(x) = h(x)$$

چون g و h دارای دامنه یک نقد، نتیجه می‌گیریم که $g = h$.

($\Longrightarrow$) فرض کنیم برای هر مجموعه X و توابع $g : C \longrightarrow A$ و $h : C \longrightarrow A$ هرگاه $f \circ g = f \circ h$ آنگاه $g = h$. برای اثبات یک به یک بودن f فرض می‌کنیم که p و q دو عضو A بوده و $f(p) = f(q)$. باید نشان دهیم که $p = q$. تابع $g : A \longrightarrow A$ ها را با ضابطه $g(x) = x$ برای $x \neq p$ و $g(p) = q$ تعریف می‌کنیم. در این صورت $f \circ g = f \circ \mathbb{1}_A$ (چرا؟). پس $g = \mathbb{1}_A$. بالاخص، $q = g(p) = \mathbb{1}_A(p) = p$ و هوالمطلوب.

نکته. به زبان غیررسمی، می‌توانیم بگوییم که توابع یک به یک آندسته از توابع هستند که (در ضرب توابع) قابل حذف از چپ هستند. سؤال دوگان (جفت) این قضیه را می‌توان اینگونه مطرح کرد: توابعی که قابل

حذف از راست‌اند چه ویژگی دارا هستند.

۳-۱۱-۲ قضیه. فرض کنیم $f : A \longrightarrow B$ یک تابع باشد. در این صورت f پوشا است اگر و فقط اگر هرگاه C یک مجموعه و $g : B \longrightarrow C$ و $h : B \longrightarrow C$ دو تابع باشند به قسمی که $g \circ f = h \circ f$ آنگاه $g = h$.

برهان. ثابت می‌کنیم که هرگاه f، A را به روی B نقش کند (پوشایی)، قابل حذف از راست است. اثبات نیمه دیگر، یعنی عکس قضیه اول، را به دانشجو محول می‌کنیم.

فرض کنیم f پوشا بوده، C یک مجموعه و g و h دو تابع $g : B \longrightarrow C$ و $h : A \longrightarrow C$ باشند به قسمی که $g \circ f = h \circ f$. همچنین فرض کنیم $b \in B$ عضوی دلخواه باشد. چون $\mathrm{dom}(g) = B = \mathrm{dom}(h)$، کافی است نشان دهیم که $g(b) = h(b)$. چون f پوشا است، aی هست که $a \in A$ و $f(a) = b$. بنابراین فرض $g(f(a)) = h(f(a))$. لذا $g(b) = h(b)$.

تعریف ۶. هر تابع یک‌به یک و پوشا بر A به روی B را یک **تابع دوسویی** یا یک تناظر یک‌به یک می‌نامیم.

۳-۱۱-۳ نکته بسیار مهم. در ریاضیات غالباً دو شئی G و H را اساساً یکی تلقی می‌کنیم هرگاه بتوان تابعی دوسویی بین آنها چنان تعریف کرد که خوشرفتار باشد. خوشرفتاری توابع در حوزه‌های مختلف ریاضیات تعبیرات مشخص خاص خود را داراست. برای مثال خوشرفتاری توابع دوسویی را در علوم جبری «یکریختی» و خوشرفتاری توابع دوسویی را در حوزهٔ توپولوژی «همیومورفیسم» می‌نامیم. یکریختی‌ها معیاری برای تشخیص و مقایسه ساختارهای جبری هستند که اساساً یکسان عمل می‌کنند. مقایسه مجموعه‌هایی که ذاتاً به یک اندازه و بزرگی هستند صرفاً توسط توابع دوسویی امکان‌پذیر است. به ویژه مقایسه مجموعه‌های خیلی بزرگ (نامتناهی) با ابزار توابع دوسویی ازکارهای خارق‌العاده‌ای است که در راستای نظریه مجموعه‌های کانتور توسط کاشف آن جرج کانتور در قرون نوزدهم و بیستم موجبات تحولات بسیاری در این علوم گردید[۷].

۷) ۱ـ توابع در سرتاسر ریاضیات، از دوران آموزشهای ابتدایی تا ریاضیات عالی و عالی‌تر، مورد بحث و بررسی و پژوهش واقع می‌شوند. به یقین می‌توان گفت که مفهوم تابع مهمترین مفهوم در سرتاسر ریاضیات است. در هر مبحثی از ریاضیات

وقتی $f : A \longrightarrow B$ تابعی دوسویی باشد، مجموعه‌های A و B را هم‌ارز می‌نامند. دو مجموعه هم‌ارز به لحاظ بزرگی و مقدار اعضا به یک اندازه هستند.

فرض کنیم A مجموعه اعداد زوج و N مجموعه اعداد طبیعی بوده باشد، تناظر (نگاشت)

$$\begin{array}{ccccccccccccc} N & : & ۱ & ۲ & ۳ & ۴ & ۵ & ۶ & ۷ & ۸ & \cdots & n & \cdots \\ f\big\downarrow & & & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & & & & \downarrow & \\ A & : & ۲ & ۴ & ۶ & ۸ & ۱۰ & ۱۲ & ۱۴ & ۱۶ & \cdots & ۲n & \cdots \end{array}$$

یک تابع دوسویی است.(چرا؟) پس A و N هم ارز (مساوی)اند.

به عنوان مثالی دیگر به یک مثال هندسی می‌پردازیم. می‌دانیم هر پاره‌خط مجموعه‌ای از نقاط است.

۳-۱۱-۴ مثال. ثابت کنید تعداد نقاط هر دو پاره خط (با طولهای دلخواه) برابر است.

حل. فرض کنیم AB و CD دو پاره خط با طولهای دلخواه باشند (شکل زیر) نقاط انتهایی دو پاره خط را مطابق شکل به هم وصل می‌کنیم. از تقاطع خطوط AD و BC نقطه O حاصل می‌شود. اکنون تابع

ملحقات زیبایی به تابع افزوده شده تا ساختارهای ریاضی بهتر مقایسه گردند. در مبحث گروههای جبری از تابعی که بین دو ساختار برقرار می‌گردد به عنوان همریختی گروه و در مبحث حلقه‌ها همریختی حلقه و در مبحث نظریه مدولها از همریختی مدول یاد می‌شود. در آنالیز از توابعی که به نوعی در شناخت و مقایسه فضاها مؤثر هستند به عنوان تابع خطی، تابع ضربق داخلی، تابعگون (functional)، و ایزومتری یاد می‌کنند. در جبر کاتگوری‌ها و جبر همولوژی از تابعی با ویژگیهای خاصی به عنوان فانکتور (fanctor) یاد می‌کنند. به‌هر تقدیر تا هر جا که مطالعه ریاضیات ادامه دارد با توابع پیچیده و پیچیده‌تر سروکار خواهیم داشت.

f را چنین تعریف می‌کنیم.

$$f : AB \longrightarrow CD$$

$$f(M) = CD \text{ با } MO \text{ نقطه تقاطع امتداد } = M'$$

به آسانی می‌توان ثابت کرد که f یک‌به‌یک و پوشا است.(چرا؟)

۳-۱۱-۵ مثال. فرض کنیم $X = (-۱, ۱)$ و $f : \mathbb{R} \longrightarrow X$ تابع با ضابطه تعریف زیر باشد.

$$f(x) = \frac{x}{۱ + |x|}$$

ثابت کنید f تابعی دوسویی بر $\mathbb{R}$ به روی بازه باز $(-۱, ۱)$ است.

حل. چون

$$|f(x)| = \frac{|x|}{۱ + |x|} < ۱$$

پس $-۱ < f(x) < ۱$. حال فرض کنیم $y \in X$ عضو دلخواهی باشد. دو حالت وجود دارد.

حالت اول: $۰ < y < ۱$. xی متعلق به $\mathbb{R}$ می‌جوییم که $f(x) = y$ (پوشایی). x را مثبت پیدا می‌کنیم.

پس

$$\frac{x}{۱ + x} = y$$

$$y + xy = x$$

و یا

$$y = x(۱ - y)$$

در نتیجه $x = \frac{y}{۱-y}$ جواب است.

حالت دوم: $-۱ < y < ۰$. x را منفی می‌یابیم. لذا

$$\frac{x}{۱ - x} = y$$

$$x = y - yx \Longrightarrow x(۱ + y) = y$$

پس $x = \frac{y}{1+y}$ جواب است.

نشان می‌دهیم که f یک‌به یک است. فرض کنیم $f(x_1) = f(x_2)$.

$$\frac{x+1}{1+|x_1|} = \frac{x_2}{1+|x_2|}$$

لذا یا هردوی x_1 و x_2 مثبت و یا هر دوی آنها منفی‌اند. فرض کنیم x_1 و x_2 هر دو مثبت باشند. در نتیجه

$$\frac{x+1}{1+x_1} = \frac{x_2}{1+x_2}$$

$$x_1 + x_1x_2 = x_2 + x_2x_1 \Longrightarrow x_1 = x_2$$

حالت آنکه x_1 و x_2 هر دو منفی باشند مشابه است و باز به آسانی نتیجه می‌شود که $x_1 = x_2$. پس f یک‌به یک نیز می‌باشد.

تعبیر شهودی مثال ۲ از این قرار است که تعداد نقاط بازه باز $(-1, 1)$ با تعداد کل نقاط خط حقیقی برابر است. به عبارت دیگر تعداد اعداد بین -1 و 1 با تعداد کل اعداد حقیقی یکی است؛ چیزی که بدون اثبات منطقی و ساده فوق به لحاظ شهودی ساده قابل ادراک نمی‌باشد!

۳-۱۱-۶ قضیه. فرض کنیم $f : a \longrightarrow B$ و $g : B \longrightarrow A$ دو تابع باشند.

الف) هرگاه $fog = 1_A$ آنگاه f پوشا است. (معکوس راست)

ب) هرگاه $gof = 1_B$ آنگاه f یک به یک است. (معکوس چپ)

ج) هرگاه مفروضات الف و ب برقرار باشند f دوسویی بوده و تابع، تابع معکوس f و تابع f تابع معکوس g است.

برهان. فرض کنیم $fog = 1_B$. فرض کنیم C یک مجموعه، $h : B \longrightarrow C$ و $k : B \longrightarrow C$ توابعی باشند به طوری که $kof = hof$. طبق قضیه قبل برای آنکه f پوشا باشد. کافی است نشان دهیم که $k = h$. امّا

$$(kof)og = (hof)ogo$$

و یا

$$ko(fog) = ho(fog)$$

در نتیجه

$$k = ko1_B = ko(fog) = ho(fog) = ho1_B = h$$

حال فرض کنیم $gof = 1_A$. فرض کنیم C یک مجموعه و $h : C \longrightarrow A$، $k : C \longrightarrow A$ توابعی باشند به طوری که $foh = fok$. برای آنکه نشان دهیم که f یک‌به یک است باید نشان دهیم که $h = k$.

چون

$$fo(foh) = go(fok)$$

و یا

$$(gof)oh = (gof)ok$$

و بنابراین

$$h = 1_A oh = 1_A ok = k$$

حال فرض کنیم مفروضات احکام (الف) و (ب) برقرار باشند. پس f یک‌به‌یک و پوشا و در نتیجه دوسویی است.

۳-۱۱-۷ تمرین. با استفاده از قضیهٔ اخیر و استفاده از تابع $g : (-1, 1) \longrightarrow \mathbb{R}$ با ضابطه تعریف $g(x) = \frac{x}{1-|x|}$،

مثال ۲ قبلی را به طریقی دیگر ثابت کنید.

نکته. قضیهٔ اخیر، در موارد بسیاری، دستورالعمل دوسویی بودن یک تابع را به دست می‌دهد. بدین نحو برای آنکه ثابت کنیم f یک‌به یک است، نشان می‌دهیم که f معکوس چپ دارد. به علاوه برای آنکه نشان دهیم که f پوشا است نشان می‌دهیم که f دارای معکوس راست است.

۳-۱۱-۸ قضیه. فرض کنیم $f : B \longrightarrow C$ و $g : A \longrightarrow B$ دو تابع باشند. احکام ذیل برقرارند:

الف) هرگاه f و g پوشا باشند، fog نیز پوشا است.

ب) هرگاه f و g یک‌به یک باشند، fog نیز یک‌به یک است.

ج) هرگاه g تابعی دوسویی باشد، g^{-1} نیز تابعی دوسویی است.

برهان. **الف)** فرض کنیم f و g پوشا باشند. همچنین فرض کنیم $c \in C$ (همدانه fog) عضوی دلخواه باشد. چون f، B را به روی C نقش می‌کند $b \in B$ی هست که $f(1) = C$. چون g، A را به روی B می‌نگارد $x \in A$ی هست به قسمی که $g(x) = b$. لهذا

$$(fog)(x) = f(g(x)) = f(b) = c$$

یعنی fog پوشا است.

ب) فرض کنیم f و g یک‌به یک باشند. برای آنکه نشان دهیم که fog یک‌به یک است، فرض می‌کنیم

$$(fog)(x_1) = (fog)(x_2)$$

و نشان می‌دهیم که $x_1 = x_2$. داریم

$$f(g(x_1)) = f(g(x_2))$$

امّا f یک‌به یک است، از اینجا نتیجه می‌شود که

$$g(x_1) = g(x_2)$$

و چون y یک‌به یک است نتیجه می‌گیریم که $x_1 = x_2$.

ج) چون g^{-1} تابعی دوسویی است، تابع معکوس آن g^{-1} وجود دارد.

$$g^{-1} : B \longrightarrow A$$

فرض کنیم $a \in A$ عضوی دلخواه باشد. پس $g(a) \in B$ عضوی از همدانه g است. داریم:

$$g^{-1}(g(a)) = g(^{-1}og)a) = 1_A(a) = a$$

یعنی g^{-1} پوشا است.

فرض کنیم $g^{-1}(x_1) = g^{-1}(x_2)$. لهذا $g(g^{-1}(x_1)) = g(g^{-1}(x_2))$؛ در نتیجه $x_1 = x_2$ یعنی g^{-1} یک‌به یک است.

۳-۱۱-۹ نتیجه. ترکیب دو تابع دوسویی یک تابع دوسویی است.

نوع خاصی از توابع دوسویی وجود دارد و آن وقتی است که دامنه و همدانه تابع یک مجموعه باشد.

تعریف ۶. فرض کنیم S یک مجموعه دلخواه ناتهی باشد. هر تابع دوسویی

$$f : S \longrightarrow S$$

را یک **جایگشت** مجموعه S می‌نامیم.

بدیهی است که از جمله جایگشت‌های یک مجموعه تابع همانی آن مجموعه‌هاست:

$$1_S : S \longrightarrow S$$

$$x \rightsquigarrow x$$

یک تابع دوسویی، لذا یک جایگشت S می‌باشد.

به علاوه هرگاه $f : S \longrightarrow S$ یک جایگشت S باشد. بنابر قضیهٔ قبل $f^{-1} : S \longrightarrow S$ نیز یک جایگشت S است.

۳-۱۱-۱۰ تعریف. مجموعه همه‌ی جایگشت‌های مجموعه S را به $Sym(S)$ نشان می‌دهیم[۸].

۳-۱۱-۱۱ قضیه. فرض کنیم S یک مجموعه ناتهی باشد. احکام ذیل در خصوص $Sym(S)$ برقرارند:

الف) $Sym(S) \neq \phi$ (چرا؟)

ب) هرگاه $f, g \in Sym(S)$، $f, g \in Sym(S)$.

ج) هرگاه $f \in Sym(S)$، $f^{-1} \in Sym(S)$

د) $1_S \in Sym(S)$

ه) هرگاه $f, g, h \in Sym(S)$، $fo(goh) = (fog)oh$.

۸) Sym حروف اول کلمه Symetry به معنی تقارن است.

همهٔ احکام فوق به طریقی در مباحث قبل بیان و اثبات شده‌اند. برای مثال حکم (ه) حالت خاصی از شرکت‌پذیری ضرب توابع است که در حالت کلی اثبات شده است. در اینجا، به سبب اهمیتی که $Sym(S)$ در مبحث نظریه گروهها(مبانی جبر) دارد ویژگی‌های $S'ym(S')$ بیان شده است. وقتی S یک مجموعه تابعی مثلاً شامل n عضوی باشد، $Sym(S)$ را به منظور سهولت به S_n نشان داده و آن را گروه متقارن درجه n می‌نامند.

تمرین.

۱) فرض کنیم $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ تابعی با ضابطه تعریف $f(x) = ۱۷ - ۳x$ باشد. ثابت کنید f دوسویی است و فرمولی برای $f^{-۱} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ پیدا کنید.

۲) فرض کنیم $f : (-\infty, \frac{۱۷}{۳}] \longrightarrow \mathbb{R}$ که $f(x) = \sqrt{۱۷ - ۳x}$. ثابت کنید f تابعی دوسویی است که دامنه را بروی $[۰, \infty)$ می‌نگارد. ضابطه $f^{-۱} : [۰, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ را پیدا کنید.

۳) فرض کنیم $f : (-\infty, \frac{۱۷}{۳}) \longrightarrow \mathbb{R}$ که $f(x) = (۱۷ - ۳x)^۲$. ثابت کنید f تابعی یک‌به یک است که دامنه را بروی $[۰, \infty)$ می‌نگارد. فرمولی برای $f^{-۱} : [۰, \infty) \longrightarrow (-\infty, \frac{۱۷}{۳})$ پیدا کنید.

۴) فرض کنیم $f : (\frac{۱۷}{۳}, \infty) \longrightarrow (-\infty, ۰)$ که $f(x) = \frac{۱}{۱۷-۳x}$. ثابت کنید f تناظری دوسویی است و فرمولی برای $f^{-۱}$ پیدا کنید.

۵) فرض کنیم $f : [-۳, \infty) \longrightarrow (-\infty, \infty)$، $f(x) = x^۲ + ۶x + ۱$ و $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$، $g(x) = ۲x + ۳$. ثابت کنید gof یک‌به یک است.

۶) تابع $f : (-\infty, ۰) \longrightarrow \mathbb{R}$ با $f(x) = x^۲$ و $g : [۰, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ با

$$g(x) = \begin{cases} \frac{x}{(۱-x)}, & ۰ \leq x \leq ۱ \\ ۱ - x, & x \geq ۱ \end{cases}$$

تعریف شده‌اند. آیا $gof : (-\infty, ۰) \longrightarrow \mathbb{R}$ پوشا است؟ جواب خود را محقق سازید.

۷) فرض کنیم $[c, d]$ و $[a, b]$ دو بازه دلخواه از اعداد حقیقی باشند. تابعی مانند $f : [a, b] \longrightarrow [c, d]$ بیابید که دوسویی باشد. (راهنمایی: معادله خطی را بنویسید که نقطه به مختصات (a, c) را به نقطه به مختصات (b, d) وصل می‌کند.)

۸) فرض کنیم $g : A \longrightarrow B$ و $f : B \longrightarrow C$ دو تابع باشند. ثابت کنید هرگاه $fog : A \longrightarrow C$ پوشا باشد، f پوشا است. با ارائه یک مثال نقض نشان دهید که عکس این قضیه برقرار نمی‌باشد.

۹) دوگان(جفت) مسأله ۸ را برای مفهوم یک‌به یک بودن بیان و اثبات کنید.

۱۰) قسمت ج قضیه را ثابت کنید.

۱۱) قسمت کفایت قضیه را ثابت کنید.

۳-۱۲ توابع و افرازها

در فصل قبل ملاحظه کردیم که روابط هم‌ارزی و افرازها دو راه متمایز برای بررسی یک واقعیت و مفهوم ریاضی هستند؛ بدین معنی که هر رابطه هم‌ارزی در یک مجموعه یک افراز از آن مجموعه بدست می‌دهد و بالعکس هر افراز یک مجموعه یک رابطه هم‌ارزی در آن مجموعه تعریف می‌کند. در این بخش نشان می‌دهیم که با هر تابع مانند $f : X \longrightarrow Y$ یک رابطه هم‌ارزی مانند R در مجموعه X وابسته می‌شود. این پدیده سرآغاز قضیه‌هایی است که در مباحث جبری نظیر نظریهٔ گروهها، نظریهٔ حلقه‌ها نظریهٔ مدولها به گونه‌ای ساختاری برقرار بوده و از اهمیت بنیادی برخوردار هستند.

۳-۱۲-۱ قضیه. فرض کنیم $f : X \longrightarrow Y$ یک تابع بوده باشد. رابطه R را در X چنین تعریف می‌کنیم

$$(a,b) \in R \Longleftrightarrow f(a) = f(b)$$

در این صورت R یک رابطه هم‌ارزی در X است.

برهان. R انعکاسی است، $f(a) = f(a)$ و لذا $(a,a) \in R$. R بالبداهه متقارن و متعدی است؛ زیرا «تساوی » چنین است.

قضیهٔ فوق به نام **قضیهٔ بنیادی توابع** مشهور است.

۳-۱۲-۲ تبصره. می‌دانیم هر رابطه هم‌ارزی در یک مجموعه یک افراز از آن مجموعه به دست می‌دهد. لذا قضیهٔ بنیادی توابع به ما این اطمینان را می‌دهد که هرگاه تابعی مانند f با دامنهٔ X داشته باشیم، یک افراز X بدان وابسته است؛ بدین معنی که دو نقطه a و b از X به یک عضو افراز تعلق دارند فقط و فقط وقتی که $f(a) = f(b)$. اکنون این فرآیند را معکوس می‌کنیم. فرض کنیم یک افراز مانند P از مجموعه X در دست باشد. آیا تابعی طبیعی وار چون f با دامنه X وجود دارد به طوری که دو نقطه a و b از X فقط وقتی به یک عضو افراز P تعلق دارند که $f(a) = f(b)$؟ خوشبختانه جواب مثبت پاسخ بسیار ساده است. تابع $f : X \longrightarrow P$ با این ضابطه تعریف می‌کنیم.

$$f(x) = x \in P \text{ عضوی از } P \text{ است که}$$

نگاشت f خوشتعریف است زیرا هیچ عضو X به دو عضو افراز تعلق ندارد. از طرف دیگر می‌دانیم رابطهٔ R که افراز P به دست می‌دهد چنین تعریف می‌گردد.

$$R = \{(a, b) \in X \times X | \text{ تعلق دارند } P \text{ یک عضو افراز } a \text{ و } b\}$$

لذا $(a, b) \in R$ اگر و فقط اگر $f(a) = f(b)$؛ ضمناً برای هر $x \in X$، $f(x) = [x]$ که در آن $[x]$ دسته هم‌ارزیی است که شامل x است. تابع $f : X \longrightarrow P$ فوق‌الاشاره را تابع کانونی[9] یا تابع طبیعی[10] وابسته به P می‌نامیم.

۳-۱۲-۳ مثال. فرض کنیم $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ تابع با ضابطه‌ای $f(x) = \sin x$ باشد. در رابطه با رابطه هم‌ارزی مذکور در قضیه، برای هر عدد حقیقی y، دسته هم‌ارزی شامل y چنین است.

$$[y] = \{x \in \mathbb{R} | \sin x = \sin y\}$$

برای نمونه $[\pi] = [۰]$ و $[\frac{\pi}{۴}] = [\frac{۳\pi}{۴}]$.

۳-۱۲-۴ مثال. فرض کنیم $X = \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶\}$ و P افراز زیر از این مجموعه باشد

$$P = \{\{۱, ۲, ۳\}, \{۴, ۶\}, \{۵\}\}$$

9) 10)

تابع طبیعی تناظر با این افراز چنین است

$$f : X \longrightarrow P$$

که در آن $f(۴) = f(۵) = \{۴, ۶\}$، $f(۱) = f(۲) = f(۳) = \{۱, ۲, ۳\}$، $f(۵) = \{۵\}$.

۳-۱۲-۵ مثال. فرض کنیم S مجموعه همه‌ی خط‌های واقع در صفحه مختصات باشد. دو خط را هم‌ارز نامیم مشروط بر آنکه موازی و یا منطبق بر هم بوده باشند. به آسانی می‌توان دریافت که این رابطه در واقع یک رابطه هم‌ارزی در S است. در نتیجه S را به دسته‌های هم‌ارز P افراز می‌کند.

فرض کنیم $f : S \longrightarrow P$ تابع طبیعی وابسته به این افراز باشد. وقتی L یک خط افقی باشد $f(L)$ گردایهٔ همه‌ی خط‌های افقی صفحه است و هرگاه L خط به معادله $y = x$ بوده باشد، $f(L)$ مجموعهٔ همه‌ی خطوطی با شیب ۱ است.

این بخش را با یک قضیه که در ارتباط مستقیم با قضیهٔ بنیادی است به پایان می‌رسانیم.

فرض کنیم $f : X \longrightarrow Y$ یک تابع و R رابطه هم‌ارزی متناظر با آن باشد. چون R افراز X است، هرگاه $a, b \in X$، a و b فقط و فقط وقتی دسته‌های هم‌ارز یکسان تولید می‌کنند که $(a, b) \in R$ و این بدان معنی است که $f(a) = f(b)$. به زبان روابط هم ازری

$$[a] = [b] \Longleftrightarrow f(a) = f(b)$$

گاهی از R به عنوان هسته f نیز یاد می‌شود.

با این توصیفات قضیهٔ بعدی را که به قضیهٔ هسته مشهور است بیان و اثبات می‌کنیم. طبق معمول مجموعه دسته‌های هم‌ارزی را با نماد $X/\mathbb{R}$ نشان می‌دهیم.

۳-۱۲-۶ قضیه. تابع

$$\bar{f} : X/\mathbb{R} \longrightarrow Y$$

با ضابطهٔ تعریف

$$\bar{f}([x]) = f(x)$$

تابعی یک‌به یک است.

برهان. ابتدا باید نشان دهیم که $\bar{f}$ در واقع تابع است، یعنی خوشتعریف است. باید نشان دهیم که برای متغیرهای یکسان مقدار تابع تغییر نمی‌کند.

فرض کنیم $[x_1] = [x_2]$، پس $f(x_1) = f(x_2)$، لذا $\bar{f}([x_1]) = \bar{f}([x_2])$. اکنون به آسانی یک‌به یک بودن $\bar{f}$ را نشان می‌دهیم. فرض کنیم $\bar{f}([x_1]) = \bar{f}([x_2])$. لذا $f(x_1) = f(x_2)$ و در نتیجه $[x_1] = [x_2]$.

نکته مهم. قضیه ۹ در واقع مبین آن است که از هر تابع، ولوآنکه یک‌به یک نباشد، می‌توان تابعی یک‌به یک به دست آورد. تابع $\bar{f}$ معرفی شده در قضیه را **تابع القایی** f [۱۱] نیز می‌نامند. ارتباط f و $\bar{f}$ در دیاگرام ذیل به نمایش درآمده است.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \searrow \pi & & \nearrow \bar{f} \\ & X/R & \end{array}$$

که در آن $\pi(x) = [x]$ و $\bar{f}([x]) = f(x)$. اصطلاحاً گوییم دیاگرام خاصیت جابه جایی دارد، یعنی فلش‌های متوالی برابر فلش دیگر است. معمولاً نگاشت (تابع)

$$X \longrightarrow X/R$$

$$x \rightsquigarrow [x]$$

را نگاشت طبیعی یا نگاشت کانونی نامیده و به π نشان می‌دهند. پس

$$\bar{f} o \pi = f$$

و این معنی جابه‌جایی دیاگرام است.

تمرین.

۱) قضیهٔ بنیادی توابع را اثبات کنید.

۲) فرض کنیم P یک افراز مجموعه ناتهی X و $f : X \longrightarrow P$ تابع طبیعی باشد. اگر f یک‌به یک باشد. در مورد افراز P چه می‌توان گفت؟

۱۱) جبریست‌ها به جای واژه تابع ترجیح می‌دهند از واژه نگاشت استفاده کنند. تابع القایی در مقابل واژه induced function یا induced mup می‌باشد.

۳) برای زیرمجموعه‌های ناتهی A و B از $\mathbb{N}$، رابطه‌ی $A \simeq B$ چنان تعریف می‌کنیم که تابعی یک‌به یک وجود داشته باشد که Aرا به روی B نقش کند.

الف) ثابت کنید $\simeq$ یک رابطهٔ هم‌ارزی در $\mathcal{P}(\mathbb{N}) - \{\phi\}$ است.

ب) فرض کنیم f تابع طبیعی وابسته به رابطه $\simeq$ بوده باشد، به زبان ساده بگوئید که هرگاه $f(A) = f(B)$، A و B چگونه‌اند؟

۴) فرض کنیم P یک افراز $\mathbb{Z}$ به نه کلاس هم‌ارزی به هنگ ۹ باشد. تابع $f : P \longrightarrow P$ را با ضابطه

$$f([x]) = [۵x]$$

تعریف می‌کنیم. الف) ثابت کنید f یک تابع خوشتعریف است. ب) نشان دهید f یک جایگشت P است.

۵) فرض کنیم P افراز $\mathbb{Z}$ مذکور در تمرین ۴ باشد. نگاشت f را با ضابطه $f([x]) = [x^۲]$ تعریف می‌کنیم. آیا f خوشتعریف است؟ ادّعای خود را با دلیل ارائه دهید.

۶) فرض کنیم S مجموعه‌ای ناتهی باشد. برای هر زیرمجموعه $A \subseteq S$، تابع حقیقی را با ضابطه

$$x_A : S \longrightarrow \{۰, ۱\}$$
$$x_A(x) = \begin{cases} ۱, & x \in A \\ ۰, & x \notin A \end{cases}$$

تعریف می‌کنیم. بنابراین $\chi_p(x) = ۰$ برای هر $x \in S$ و $\chi_S(x) = ۱$ برای هر $x \in S$. تابع χ_A را **تابع مشخصه** A می‌نامیم. نشان دهید الف) برای هر دو زیرمجموعه $A, B \subseteq S$، $\chi_A = \chi_B$ اگر و فقط اگر $A = B$. ب) $\chi_A \cdot \chi_B = \chi_{A \cap B}$ و $\chi_A + \chi_{A'} = \chi_S$ (A' متمم A است).

۳-۱۳ هم‌ارزیهای مشهور

در این بخش به اثبات برخی هم‌ارزیهای مشهور می‌پردازیم. همچنین نشان خواهیم داد که این تصور که هر دو مجموعه نامتناهی هم‌ارز هستند تصوری باطل می‌باشد. برای مثال گرچه $\mathbb{R}$ (مجموعه اعداد حقیقی) و $\mathbb{N}$ (مجموعه اعداد طبیعی) گرچه مجموعه هایی بسیار بزرگ هستند امّا هم عدد نمی‌باشند. در حالی که $\mathbb{N}$ و $\mathbb{Q}$ (مجموعه اعداد گویا) به یک اندازه (همعدد)اند! تنها ملاک مقایسه مجموعه‌ها، متناهی و یا نامتناهی، وجود و یا عدم وجود توابع دوسویی است که می‌تواند (در صورت وجود) بین دو مجموعه برقرار باشد.

۳-۱۴ قضیه (کانتور)

فرض کنیم A یک مجموعه دلخواه باشد. در این صورت تابعی یک‌به یک مانند $f : A \longrightarrow \mathcal{P}(A)$ وجود دارد، امّا هیچ تابع پوشایی بر A به روی $\mathcal{P}(A)$ وجود ندارد.

برهان. تابع f به آسانی قابل تعریف است.

$$f : A \longrightarrow \mathcal{P}(A)$$
$$f(x) = \{x\}$$

چون $x \in A$، پس بالبداهه $\{x\} \subseteq A$ در نتیجه $\{x\} \in \mathcal{P}(A)$ و تابع f دقیقاً با همدانه $\mathcal{P}(A)$ است. f یک‌به یک است. برای اثبات این، فرض کنیم $f(x_1) = f(x_2)$. لهذا $\{x_1\} = \{x_2\}$ و این فقط وقتی است که $x_1 = x_2$. اکنون نشان می‌دهیم که هرگاه $g : A \longrightarrow \mathcal{P}(A)$ تابعی دلخواه باشد، g **پوشا** نخواهد بود.

فرض کنیم g پوشا بوده باشد (فرض خلف). زیر مجموعه B از A را چنین تعریف می‌کنیم

$$B = \{x \in A | x \notin g(x)\}$$

لهذا $B \in \mathcal{P}(A)$. چون g پوشا فرض شده است. yی هست که $y \in A$ و $g(y) = B$. اکنون دو حالت وجود دارد.

حالت اول. $y \in g(y)$. پس طبق تعریف B، $y \notin B$. امّا $B = g(y)$. در نتیجه $y \notin g(y)$ و این با فرض این حالت در تناقض است.

حالت دوم. $y \notin g(y)$. لذا طبق تعریف B، $y \in B$ یعنی $y \in g(y)$ که این نیز با فرض این حالت در تناقض است.

چون در هر حالت تناقض وجود دارد. فرض خلف باطل و چنین تابع پوشای g وجود ندارد.

۳-۱۵ نتیجه.

هیچ تناظر دوسویی بین $\mathbb{N}$ و $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ وجود ندارد.

۳-۱۶ قضیه. $\mathbb{N} \simeq \mathbb{N}$

برهان. تابع

$$f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z}$$

را با ضابطه

$$f(n) = \begin{cases} \frac{\pi}{۲}, & n \text{ زوج است} \\ -\frac{n-۱}{۲}, & n \text{ فرد است} \end{cases}$$

به آسانی می‌توان ثابت کرد که f پوشا و یک‌به یک است. (تمرین . . .)

۳-۱۷ قضیه ۱۰ $\mathbb{N} \simeq \mathbb{Q}$

برهان. ابتدا ثابت می‌کنیم که $\mathbb{Q}^+$ مجموعه اعداد گویای مثبت با $\mathbb{N}$ هم‌ارز است. جدول زیر را متشکل از کسرهای مثبت آرایش می‌دهیم. (چگونه؟):

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
\frac{۱}{۱} & \longrightarrow & \frac{۱}{۲} & & \frac{۱}{۳} & \longrightarrow & \frac{۱}{۴} & & \frac{۱}{۵} & \longrightarrow & \frac{۱}{۶} & \cdots \\
 & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & \\
\frac{۲}{۱} & & \frac{۲}{۲} & & \frac{۲}{۳} & & \frac{۲}{۴} & & \frac{۲}{۵} & & \frac{۲}{۶} & \cdots \\
\downarrow & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & & & \\
\frac{۳}{۱} & & \frac{۳}{۲} & & \frac{۳}{۳} & & \frac{۳}{۴} & & \frac{۳}{۵} & & \frac{۳}{۶} & \cdots \\
 & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & & & & & \\
\frac{۴}{۱} & & \frac{۴}{۲} & & \frac{۴}{۳} & & \frac{۴}{۴} & & \frac{۴}{۵} & & \frac{۴}{۶} & \cdots \\
\downarrow & \nearrow & & \swarrow & \vdots & & \vdots & & & \vdots & \cdots & \\
\vdots & \swarrow & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \cdots \\
\downarrow & & & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & &
\end{array}
$$

آری، در سطر اول همه‌ی کسرهای با صورت ۱، در سطر دوم همه کسرهای با صورت ۲ و به طور کلی در سطر nام همه کسرهای با صورت n نوشته شده‌اند. البته برخی کسرها (مانند $\frac{۱}{۱}$، $\frac{۲}{۲}$، $\frac{۳}{۳}$، ...) بیش از یک بار در این آرایش ظاهر شده‌اند ولی فعلاً کاری به این تکرار نداریم. هدف ما برقرار تناظری دوسویی بین اعضای این آرایش و اعداد طبیعی است. در واقع خواهیم به گونه‌ای اعداد این جدول را با اعداد طبیعی بشماریم به گونه‌ای که هیچ یک از اعضای جدول کنار گذاشته نشود و هر عدد طبیعی نیز برای شمارش فقط یک بار به کار آید (پوشایی و یک‌به‌یک بودن). جدول را از بالا به پایین و از چپ به راست **طی** می‌کنیم. فلش‌ها نشانگر روش طی کردن جدول هستند. در مرحله بعد در راستای فلش‌ها جدول را باز کرده و به صورتی زنجیری در می‌آوریم.

$$(*)\ \frac{۱}{۱}\ \frac{۱}{۲}\ \frac{۲}{۱}\ \frac{۳}{۱}\ \frac{۲}{۲}\ \frac{۱}{۳}\ \frac{۱}{۴}\ \frac{۲}{۳}\ \frac{۳}{۴}\ \frac{۴}{۱}\ \frac{۵}{۱}\ \frac{۴}{۲}\ \frac{۳}{۳}\ \frac{۲}{۴}\ \frac{۱}{۵} \cdots$$

اینک تطبیق اعضای جدل با اعداد طبیعی بسیار آسان است. ابتدا هر کسر را یکبار (بار اول) نگهداشته و در صورت تکرار، بقیه تکرارهای آن کسر را از زنجیره فوق حذف می‌کنیم.

$$(**)\frac{۱}{۱}\ \frac{۱}{۲}\ \frac{۲}{۱}\ \frac{۳}{۱}\ \frac{۱}{۳}\ \frac{۱}{۴}\ \frac{۲}{۳}\ \frac{۳}{۴}\ \frac{۴}{۱}\ \frac{۵}{۱}\ \frac{۱}{۵}\cdots$$

اعضای جدید همان اعضای (*) و لذا همان اعضای جدول دو بعدی‌اند؛ پس کسرهای موجود در (**) همه کسرهای گویای مثبت است. اکنون تطبیق این دنباله با اعداد طبیعی کار بسیار آسانی است. در واقع این تطبیق تاکنون برقرار شده است! چرا که هر وقت یک دنباله متمایز از اشیاء نوشته باشیم، این دنباله در واقع تابعی بر N بوده و خود به خود با N در تناظر دوسویی است.

$$\begin{array}{lcccccccccccc}
Q^+: & \frac{۱}{۱} & \frac{۱}{۲} & \frac{۲}{۱} & \frac{۳}{۱} & \frac{۱}{۳} & \frac{۱}{۴} & \frac{۲}{۳} & \frac{۳}{۴} & \frac{۴}{۱} & \frac{۵}{۱} & \frac{۱}{۵} & \cdots \\
f\uparrow: & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \\
N: & ۱ & ۲ & ۳ & ۴ & ۵ & ۶ & ۷ & ۸ & ۹ & ۱۰ & ۱۱ & \cdots
\end{array}$$

تابع f دوسویی بوده و حکم برقرار است.

اکنون به آسانی می‌توانیم نشان دهیم که $\mathbb{N} \simeq \mathbb{Q}$.

چگونه؟

$\mathbb{N}$ را به دو نیمه می‌کنیم، نیمه اعداد زوج و نیمه اعداد فرد. نیمه اعداد زوج را که خود با $\mathbb{N}$ در تناظر دوسویی است با Q^+ و نیمه فرد را (که آن نیز با N در تناظر دوسویی است) با $Q^- \vee \{۰\}$ تطبیق می‌دهیم. فرض کنیم $f_۱ : A \longrightarrow Q^+$ و $f_۲ : B \longrightarrow Q^- \vee \{۰\}$ توابع دوسویی باشند که از ترکیب توابع دوسویی فوق حاصل می‌شوند. در اینجا A مجموعه اعداد زوج طبیعی و B مجموعه اعداد فرد طبیعی است. اینک با چسباندن مجدد A و B تابع دوسویی مورد نظر ساخته می‌شود:

$$\&g : \mathbb{N} \longrightarrow Q$$

$$g(x) = \begin{cases} f_۱(n), & \text{زوج است.}\ n \\ f_۲(n), & \text{فرد است.}\ n \end{cases}$$

چون $f_۱$ و $f_۲$، یک‌به یک‌اند. g نیز یک‌به یک است. و چون $f_۱$ و $f_۲$ به ترتیب Q^+ و $Q^- \cup \{۰\}$ را می‌پوشانند g، $Q = Q^+ \cup Q^- \cup \{۰\}$ را می‌پوشاند. پس g دوسویی است.

۳-۱۸ برخی توابع حقیقی

توابع حقیقی که در بخش تعریف شدند ابزار اصلی حسابان و دروس آنالیز ریاضی هستند. به سبب وفور کاربرد پذیری این دسته از توابع از اهمیت ویژه‌ای برخوردار هستند. مفاهیم مهم ریاضی نظیر حد، مشتق و انتگرال در خصوص توابع حقیقی معنایی طبیعی‌تر و واقعی‌تر دارند؛ گرچه این گونه مفاهیم در باب توابع دیگر، نظیر توابع برداری و توابع مختلط نیز فرمولبندی شده و مورد مطالعه ریاضیدانان و فیزیکدانان هستند. در این بخش ابتدائاً اشاره‌ای به جبر توابع حقیقی خواهد شد و در ادامه بحث برخی توابع حقیقی که از قبل نیز باآنها آشنایی دارید مرور خواهند شد.

جبر توابع حقیقی. فرض کنیم f و g و h توابعی حقیقی با دامنهٔ مشترک A باشند. جمع، ضرب، تقسیم و تفاضل دو یا چند تابع حقیقی را با استفاده از اعمال چهار عمل اصلی حساب می‌توانیم به آسانی تعریف کرده و توابع جدیدی بسازیم:

حاصل جمع f و g را که با نماد $f+g$ نشان می‌دهیم $f+g : A \longrightarrow \mathbb{R}$ چنین تعریف می‌کنیم

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

(علامت + در سمت راست همان جمع اعداد حقیقی است)

لذا این جمع را جمع نقطه‌ای نیز می‌نامیم.

حاصل ضرب f و g را که با نماد fg نشان می‌دهیم، به صورت نقطه‌ای تعریف می‌کنیم

$$(fg)(x) = f(x)g(x)$$

مشابهاً $f-g$ و f/g (وقتی که همواره $g(x) \neq ۰$) به کمک تفاضل و تقسیم اعداد حقیقی تعریف می‌شوند:

$$(f-g)(x) = f(x) - g(x)$$

$$(f/g)(x) = f(x)/g(x)$$

بنابراین واضح است که $f+g$، fg، $f-g$ و f/g نیز توابعی حقیقی هستند. تابع $۰ : A \longrightarrow \mathbb{R}$ را که با ضابطه $۰(x) = ۰$ تعریف می‌شود تابع صفر و تابع ثابت $۱ : A \longrightarrow \mathbb{R}$ را که با ضابطه $۱(x) = ۱$

تعریف می‌شود، تابع ۱ می‌نامیم.

نقش تابع صفر در جمع توابع همانند نقش عدد صفر در جمع اعداد است. مشابهاً نقش تابع ۱ در ضرب توابع مشابه نقش عدد ۱ در ضرب اعداد است.

تکلیف.

۱) ثابت کنید هرگاه f و gو h سه تابع حقیقی با دامنه A باشند

الف) $f(g \pm h) = fg \pm fh$

ب) $(g \pm h)f = gf \pm hf$

۲) ثابت کنید(با ذکر یک مثال) که تساوی $fg = gf$ در حالت کلی برقرار است.

۳) هرگاه $f : A_1 \longrightarrow \mathbb{R}$ و $g : A_2 \longrightarrow \mathbb{R}$، مفهوم $f + g$ و fg را تعمیم دهید (راهنمایی: از $A_1 \cap A_2$ استفاده کنید)

۴) فرض کنیم $D_1 \cap D_2 \neq \phi$ و f و g دو تابع با دامنه‌های D_1 و D_2 (به ترتیب) بوده باشند. دو تابع $f \wedge g$ (تابع مین) و $f \vee g$ (تابع ماکس) را چنین تعریف می‌کنیم

$$f \wedge g : D_1 \cap D_2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(f \wedge g)(x) = \min\{f(x), g(x)\}, (f \vee g)(x) = \max\{f(x), g(x)\}$$

ثابت کنید برای هر $x \in D_1 \cap D_2$.

$$(f \vee g)(x) = [f(x) + g(x)]/2 + |f(x) - g(x)|/2$$

همچنین فرمولی مشابه برای $(f \wedge g)(x)$ پیدا کنید.

۳-۱۸-۱ نکته. در جمع، ضرب و تقسیم توابع، لزومی به اینکه دامنه توابع یکسان باشد نداریم، چرا که می‌توانیم اشتراک دامنه‌ها را لحاظ کنید. برای نمونه هرگاه f با دامنه D_1 و g با دامنه D_2 بوده و $D = D_1 \cap D_2 \neq \phi$، $f + g$ را با دامنه D و با ضابطه‌ی

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \qquad x \in D$$

تعریف می‌کنیم.

۳-۱۸-۲ نکته. بعضاً پرسش می‌شود که آیا تابعی با دامنه ϕ (مجموعه تهی) وجود دارد؟ به عبارت دیگر پرسش می‌شود که آیا ϕ یک تابع است؟

وقتی ϕ به عنوان یک فرآیند و ماشینی عمل می‌کند که می‌بایست به هر عضو دامنه عضو مشخصی را وابسته کند، در صورت تهی بودن دامنه معنی و مفهومی برای این فرآیند وجود ندارد ولذا می‌توانیم بگوییم که برای آنکه مجموعه‌ای مانند A به عنوان دامنه ملحوظ شود آن است که A ناتهی باشد. به خاطر داریم که تعریف تابع به عنوان مهمترین ابزار مطالعه و بررسی پدیده‌های طبیعی و انسانی مستلزم ناتهی بودن مجموعه متغیرهای مستقل (دامنه) است. فلذا لزومی به اینکه ϕ را به عنوان یک تابع تلقی کنیم در هیچ جا آشکار نمی‌گردد.

وقتی تابع را به عنوان مجموعه‌ای از زوجهای مرتب با ویژگی خاصی، تعریف می‌کنیم دچار غلط مبحث شده و ϕ نیز در زمره توابع قرار می‌گیرد.

۳-۱۸-۳ تعریف. برای هر عدد حقیقی x، $[x]$ (براکت x) را به عنوان بزرگترین عدد صحیح که کوچکتر یا مساوی x (نابیشتر از x) تعریف می‌کنیم و آن را جزء صحیح x می‌نامیم.

همچنین $((x))$ (دبل پرانتز x) را به عنوان کوچکترین عدد صحیحی که بزرگتر یا مساوی x (ناکمتر از x) تعریف می‌کنیم.

تابع با ضابطه تعریف

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{Z}$$

$$f(x) = [x]$$

را تابع جزء صحیح یا **تابع کف**[۱۲] می‌نامیم؛ ذوجاً (دوگانی) تابع با ضابطه تعریف

$$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{Z}$$

$$g(x) = ((x))$$

را **تابع سقف**[۱۳] می‌نامیم.

12) floor function 13) ceiling function

۳-۱۸-۴ مثال. نمودار تابع $h(x) = \sqrt{x}$ و همچنین نمودار تابع مرکب

$$(foh)(x) = f(\sqrt{x}) = [\sqrt{x}]$$

در شکل زیر نشان داده شده‌اند.

تمرین. با مفروضات مثال قبل نمودار تابع مرکب

$$(goh)(x) = ((\sqrt{x}))$$

را رسم کنید.

تمرین.

۱) فرض کنیم $f(x) = ۱/(x - ۳)$ و $g(x) = \sqrt{x - ۳}$. دامنه هر یک ازتوابع زیر را بیابید.

الف) f ب) g ج) $f^{-۱}$ د) $f + g$

ه) f/g و) fog ح) gof ط) $(fog)^{-۱}$

(طبق قرارداد فرض کنید دامنه‌های f و g بزرگترین زیرمجموعه‌های $\mathbb{R}$اند که این ضابطه‌ها بر آنها معنی دارند).

۲) فرض کنید f و g توابع مفروض در مسأله ۱ بوده باشند. برای هر یک از توابع ذیل عبارتی صریح (ضابطه) پیدا کنید.

الف) f^{-1} ب) g^{-1} ج) $f+g$ د) $f.g$

ه) fog و) gof ح) $(fog)^{-1}$ ط) $(gof)^{-1}$

۳) فرض کنیم $S \neq \rho$ یک مجموعه و $A, B \subseteq S$. ثابت کنید $\chi_A = \chi_B$ فقط و فقط وقتی که $A = B$.

۴) با مفروضات مسأله ۳، ثابت کنید.

الف) $\chi_A \chi_B = \chi_{A \cap B}$ ب) $\chi_A + \chi_{\bar{A}} = \chi_S$

۵) نشان دهید که تساوی $\chi_A + \chi_B = \chi_{A \cup B}$ در حالت کلی برقرار نمی‌باشد (مثال نقض). فرمول صحیحی برای $\chi_A + \chi_B$ حدس زده و آن را ثابت کنید.

۶) نمودارهای زیر را از توابع بررسی کرده و مشخص کنید که کدام تابع تابعی یک‌به یک است. سپس برای هر تابع f که یک‌به یک می‌باشد نمودار f^{-1} را رسم کنید.

۷) نمودار هر یک از توابع زیر را رسم کنید.

الف) $f(x) = [2x]$ ب) $f(x) = [x/3]$

ج) $f(x) = [x^2 + 1]$ د) $f(x) = [-x]$

ه) $f(x) = ((2x))$ و) $f(x) = ((x^2 + 1))$

۸) فرض کنیم n و b اعداد صحیح مثبتی باشند. ثابت کنید که تعداد اعداد صحیح مثبت نابیشتر از n و قابل قسمت بر d برابر است! $[n/d]$. (الگوریتم تقسیم)

۹) فرض کنیم f تابع کف و g تابع سقف بوده باشند. ثابت کنید همواره

الف) $g(x) = -f(-x)$ ب) $f(x) = -g(-x)$

۱۰) تابع کف چگونه تابعی است؟ (از نظر یک‌به‌یک بودن و پوشایی)

۳-۱۹ جبر بول و کاربردهای آن در کامپیوتر

هدفهای آموزشی:

آشنایی با جبر بول، تابع بول، عبارت بولی و خواص آنها و نیزکاربرد آنها درکامپیوتر

هدفهای رفتاری:

از دانشجویان انتظار می‌رود پس از مطالعه این فصل بتوانند:

۱) ساختار ریاضی جبر بول را تعریف کنند و مثال‌هایی از آن ارائه دهند.

۲) خواص و ویژگی‌های جبر بول را بیان و اثبات نمایند.

۳) برای جبر بول مثالهایی بیاورند.

۴) اعمال و مجموعه‌هایی مثال بزنند که جبر بول نباشد.

۵) کاربر جبر بول را درکامپیوتر و مدارهای الکتریکی تشخیص دهند.

گزاره‌ها و مجموعه‌ها از قوانین مشابهی پیروی می‌کنند. این قوانین را برای تعریف ساختار جدیدی به نام جبر بول به کار می‌بریم.

یادآوری می‌کنیم که یک عمل دوتایی روی مجموعه‌ای مانند A، تابعی مانند

$$O : A \times A \longrightarrow A$$

است که به هر عضو $A \times A$، عضوی از A را نسبت می‌دهد. و هر تباع A به A را یک عمل یکانی می‌نامیم. مثال عمل جمع اعداد طبیعی یک عمل دوتایی و عمل قرینه‌گیری در مجموعه اعداد گویا یک عمل یکانی است.

تعریف. فرض کنیم B یک مجموعه غیرتهی همراه با دو عمل دوتایی $+$ و $\circ$ و عمل یکانی «$/$» و دو عضو مجزای $\circ$ و ۱ باشد. B را یک **جبر بول** می‌نامیم هرگاه داشته باشیم:

۱) هر دو عمل دارای خاصیت جابجایی باشد. $a.b = b.a$ و $a + b = b + a$.

۲) هر دو عمل شرکت‌پذیر باشد؛ $a(b.c) = (ab)c$ و $a(b + c) = (a + b) + c$.

۳) هر دو عمل دارای عضو همانی (بی‌اثر) باشد $a/۱ = a$ و $a + \circ = a$.

۴) هر عضو a برای هر دو عمل عضو متمم (قرینه) داشته باشد.

$$a + a' = ۱ \qquad \text{و} \qquad aa' = \circ$$

۵) هرکدام از دو عمل نسببت به دیگری توزیع پذیر باشد.

$$a.(b + c) = ab + ac \quad \text{و} \quad a + (b.c) = (a + b).(a + c)$$

توجه. اعمال $+$ و $\circ$ را جمع و ضرب معمولی اعداد **در نظر می‌گیریم** و در واقع شباهتی هم به آن دو عمل ندارند. فقط از نمادهای جمع و ضرب معمولی برای اعمال جبر بول استفاده کرده‌ایم.

مثال.

الف) فرض کنید $B = \{\circ , ۱\}$ و اعمال $+$ و $\circ$ و $'$ به صورت زیر تعریف شده باشد.

$'$	۱	$\circ$
	$\circ$	۱

+	۱	۰
۱	۱	۱
۰	۱	۰

۰	۱	۰
۱	۱	۰
۰	۰	۰

در این صورت آنگاه $(B, +, \circ, ')$ یک جبر بول است.

ب) فرض کنید $B^n = B \times \cdots \times B$ اعمال + و ۰ را مؤلفهٔ وارد اعضای B^n را به صورت اعداد در پایه ۲ در نظر می‌گیریم (اعداد n بیتی) مثلاً اگر

$$x = ۱۱۰۰۱۱,\ y = ۱۱۱۰۰۰ \Longrightarrow x+y = ۱۱۱۰۱۱, x.y = ۱۱۰۰۰۰, x' = ۰۰۱۱۰۰$$

در این صورت آنگاه B^n یک جبر بول است. توجه کنید که B^n دارای ۲^n عضو است.

ج) فرض کنید $D_{۷۰} = \{۱, ۲, ۵, ۷, ۱۰, ۱۴, ۳۵, ۷۰\}$ مجموعه مقسوم علیه‌های ۷۰ باشد اگر اعمال + و ۰ و ′ را به صورت

$$a' = \frac{۷۰}{a} \quad \text{و} \quad \text{ب. م. م.}\ a.b = (a,b) \quad \text{و} \quad \text{ک. م. م}\ a+b = [a,b]$$

آنگاه $D_{۷۰}$ همراه با این اعمال یک جبر بول است. عضو صفر این جبر عدد ۱ و عضو همانی آن عدد ۷۰ است.

د) فرض کنید $\cup$ مجموعه تمام زیرمجموعه‌های مجموعه‌ای یعنی مانند A باشد اگر عمل جمع را اجتماع مجموعه‌ها و ضرب را اشتراک مجموعه‌ها و ′ را متمم مجموعه‌ای در نظر بگیریم $(\cup, ۷, ۸, ')$ یک جبر بول تشکیل می‌دهد (چرا؟)

ه) فرض کنید $B = \{\phi, \{\phi\}\}$ و اعمال + و ۰ و ′ به صورت اجتماع، اشتراک و متمم‌گیری مجموعه‌ها باشد. ϕ بجای عضو صفر $\{\phi\}$ بجای عضو ۱ است. می‌توان ملاحظه کرد که $(B, \cup, \cap, ')$ یک جبر بول است.

ح) فرض کنید $B = \{۰, a, b, ۱\}$ و اعمال + و ۰ را به صورت زیر تعریف کنید:

+	۰	a	b	۱
۰	۰	۰	۰	۰
a	۰	a	۰	a
b	۰	۰	b	b
۱	۰	a	b	۱

۰	o	a	b	۱
۰	۰	a	b	۱
a	a	a	۱	۱
b	b	۱	b	۱
۱	۱	۱	۱	۱

و عمل متمم‌گیری را به صورت $o' = ۱, a' = b, b' = a, ۱' = ۰$ تعریف کنید. به آسانی می‌توان ملاحظه کرد که $(B, +, ۰, ۱)$ یک جبر بول است.

و) فرض کنید $S_n = \{۱, ۲, ۳, \cdots, n\}$ که در آن n یک عدد طبیعی است. اعمال $+$ و ۰ را به صورت $a + b = \max\{a, b\}$ و $a.b = \min\{a, b\}$ تعریف کنید. نشان دهید که S_n نمی‌تواند با $+$ و ۰ تشکیل یک جبر بول بدهد.

(راهنمایی: نشان دهید که با هر عمل متمم‌گیری به تناقض می‌رسید.)

۳-۲۰ زیرجبر بول

فرض نیم $(B, +, ۰, ')$ یک جبر بول باشد و $C \subseteq B$. C را یک **زیرجبر بول** B می‌نامیم هرگاه C همراه با اعمال تعریف شده برای B تشکیل یک جبر بول بدهد. توجه داشته باشید که برای جبر بول بودن C کافی است این مجموعه تحت سه عمل $+$ و ۰ و $'$ بسته باشد. (چرا؟)

مثال. دیدیم که $D_{۷۰} = \{۱, ۳, ۵, ۷, ۱۰, ۱۴, ۳۵, ۷۰\}$ یک جبر بول است. هرگاه C را به صورت $C = \{۱, ۲, ۳۵, ۷۰\}$ انتخاب کنیم آنگاه C یک زیر جبر $D_{۷۰}$ خواهد بود. زیرا

$$۱ + ۲ = ۲,\ ۲ + ۳۵ = ۷۰,\ ۳۵ + ۷۰ = ۷۰, \cdots$$

$$۱ \cdot ۲ = ۱,\ ۲ \cdot ۳۵ = ۱\ ۳۵ \cdot ۷۰ = ۳۵, \cdots$$

$$۱' = ۷۰,\ ۷۰' = ۱,\ ۲' = ۳۵,\ ۳۵' = ۲$$

مثال. فرض کنید A مجموعه‌ای دلخواه و $P(A)$ مجموعه توانی آن باشد. دیدیم که $(P(A), \cup, \cap, C)$ تشکیل یک جبر بول می‌دهند حال اگر قرار دهیم $B = \{X | X \subseteq A$ متناهی X^C یا $X\}$ یک زیرجبر $P(A)$ خواهد بود. ملاحظه می‌شود که این زیرمجموعه نسبت به دو عمل $\cup$ و $\cap$ بسته است پس زیرجبر است.

قضیه. عضو متمم a که با a' نشان داده می‌شود منحصر بفرد است. یعنی اگر داشته باشیم $a + b = ۱$ و $a.b = ۰$ آنگاه $b = a'$.

برهان.

$$\begin{aligned} b &= b/۱ \\ &= b(a + a') \\ &= ba + ba' \\ &= ۰ + ba' \\ &= aa' + ba' \\ &= (a + b)a' \\ &= ۱a' \\ &= a' \end{aligned}$$

حال می‌توانیم خواص دیگری از جبرهای بول را مطالعه کنیم.

قضیه. در هر جبر بول $(B, +, \circ, ')$ خواص زیر برقرار است:

الف) قوانین خود توانی $a + a = a,\ a.a = a$

ب) قوانین کران $a + ۱ = ۱\ a/\circ = \circ$

ج) قوانین جذب $a + ab = a\ a(a + b) = a$

د) قانون برگشت $(a')' = a$

ه) قوانین ۰ و ۱ (متمم ۰ و ۱) $o' = ۱,\ ۱' = \circ$

برهان.

الف)

$$\begin{aligned} a &= a + \circ & a.a &= aa + \circ \\ &= a + aa' & &= aa + aa' \\ &= (a + a)(a + a') & &= a.(a + a') \\ &= (a + a)۱ & &= a/۱ \\ &= a + a & &= a \end{aligned}$$

ب)

$$\begin{aligned} a + ۱۱.(a + ۱) & & a.o &= o + a.o \\ &= (a + a')(a + ۱) & &= aa' + a.o \\ &= aa + a + a'a + a' & &= a(a' + o) \\ &= a + a + o + a' & &= aa' \\ &= ۱ & &= \circ \end{aligned}$$

ج)

$$\begin{aligned} a + ab &= a/۱ + ab & a.(a + b)(a + \circ)(a + b) \\ a(۱ + b) & & &= aa + ab + \circ a + \circ b \\ &= a(b + ۱) & &= a + \circ b \\ &= a/۱ & &= a \end{aligned}$$

$$= a$$

د)
$$\begin{aligned}(a')' &= ۱.(a')' \\ &= (a+a')(a')' \\ &= a.(a')' + a'(a')' \\ &= a.(a')' + ۰ \\ &= a.(a')' + a.a' \\ &= a((a')' + a') \\ &= a./۱ \\ &= a\end{aligned}$$

ه)
$$۱' = ۱./۱' = ۰$$

و بنا به منحصر بفردی متمم هر عضو $۱ = '۰$.

۳-۲۱ قضیه (قاعده حذف)

در هر جبر بول برای هر a و b و c اگر داشته باشیم $ba = ca$ و $ba' = ca'$ آنگاه $b = c$.

برهان.

$$\begin{aligned}b = b./۱ = b(a+a') &= ba + ba' \\ &= ca + cc' \\ &= c(a+a') \\ &= c./۱ = c\end{aligned}$$

همانطورکه اشاره شد، قوانین جبرهای بول اساساً از خواص و قواعد حاکم بر مجموعه‌ها و گزاره‌ها اقتباس شده‌اند. قضیهٔ زیر یکی از معروفترین خواص متمم مجموعه‌هاست که در هر جبر بول برقرار است.

قضیه (قوانین دمورگان) در هر جبر بول داریم **الف)** $(a+b)' = a'b'$ و **ب)** $(a.b)' = a' + b'$.

برهان.

الف)

$$\begin{aligned}(a+b)+(a'.b')[(a+b)+a'].[(a+b)+b'] &= [(b+a)+a'].[(a+b)+b'] \\ &= [b+(a+a')].[a+(b+b')] \\ &= (b+a)(a+۱) = ۱\cdot ۱ = ۱\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(a+b).(a'b') = (a'b').(a+b) &= (a'.b')a + (a'.b')b \\ &= a.(a'.b') + a'(b'.b) \\ &= (a.a')b' + a'.(b.b') \\ &= ۰.b' + a'.a = b'/۰ + a'/۰ = ۰\end{aligned}$$

ب) با به کار بردن قسمت (الف) و قانون برگشت به سادگی حاصل می‌شود.

۳-۲۲ دوگانی در جبر بول

دوگاه هر عبارتی در یک جبر بول B عبارتی است که از تعویض‌های دو عمل + و ۰ و ۰ و ۱ حاصل می‌شود. مثلاً دوگان عبارت $(۱+a).(b+۰) = b$ عبارت است از $(۰ * a) + (b/۱) = b$. هرگاه تمام اصول جبر بول را به دوگان خود تغییر دهیم باز مجموعه همان اصول حاصل می‌شود. این بیانگر اصلی است که به اصل دوگانی در جبر بول معروف است.

۳-۲۳ اصل روگانی[۱۴]

دوگان هر قضیه‌ای در یک جبر بول دوباره یک قضیه است.

مثال. دوگان $(x+y)' = x'y'$ عبارت است از $(xy)' = x' + y'$.

مثال. دوگان $x + x = x$ عبارت است از $x.x = x$.

مثال. دوگان هرکدام از عبارات زیر را در یک جبر بول بنویسید.

الف) $(x+y)(x+۱) = x + xy + y$

ب) $x + (x.(y+۱)) = x$

ج) $(x'+y)(x+y') = x'.y' + xy$

د) $[(x'+y)(y'+z)](x'+z') = ۰$

حل:

الف) $(x.y) + (x+۰) = x(x+y).y$

ب) $x.(x+y/۱) = x$

ج) $(x'.y) + (x.y') = (x'+y').(x+y)$

د) $x'.y + y'.z + x'z' = ۰$

۳-۲۴ ثابت و متغیر

ثابت نمادی است که برای نشان دادن عضو یعنی از جبر بول به کار می‌رود. مثلاً ۰ و ۱ ثابت‌هایی در جبر بول هستند. امّا متغیر نمادی است که برای نشان دادن هر عضو دلخواه از جبر بول به کار می‌رود. معمولاً از حروف a و b و c و $\cdots$ و x وy و γ برای متغیرها استفاده می‌کنیم.

۳-۲۵ عبارت بولی

عبارت بولی عبارتی است که از چند متغیر مانند a و b و c و اعمال بولی $+$ و ۰ و $(')$ تشکیل شده است. بنابراین:

14) Principle of Duality

الف) هر متغیری یک عبارت بولی است.

ب) هرگاه p و q عبارات بولی باشند آنگاه $p+q$ و $p.q$ و p' نیز عبارات بولی‌اند. متناظر با هر عبارت بولی می‌توان یک تابع بولی تعریف کرد.

۳-۲۶ تابع بولی

در جبر بول $(B,+,\circ,')$ یک متغیر یا یک عبارت خوش‌تعریف شامل اعمال + و $\circ$ و $(')$ و تعداد متناهی متغیر یک تابع بولی نامیده می‌شود.

مثال. هرگاه تعریف کنیم $f(x,y)=y+x'$ آنگاه

$$f(۱,\circ)=\circ+۱'=\circ+\circ=\circ$$

$$f(\circ,۱)=۱+\circ'=۱+۱=۱$$

نکته. ممکن است عبارات بولی مختلف توابع بولی یکسانی ایجاد کنند.

۳-۲۷ ترتیب جزئی در یک جبر بول

در جبر بول $(B,+,\circ,')$ می‌توانیم یک رابطه ترتیبی جزئی به صورت

$$x\leq y \Longleftrightarrow x.y=x$$

تعریف می‌کنیم. به سادگی می‌توان دید که این رابطه خاصیت‌های انعکاسی، پادمتقارن و انتقالی را دارد، زیرا

الف) $x_{/}۱=x$ پس $x\leq x$.

ب) هرگاه $x\leq y$ و $y\leq x$ خواهیم داشت $x.y=x$ و $xy=y$ آنگاه $x=y$.

ج) هرگاه داشته باشیم $x \leq y$ و $y \leq z$ آنگاه خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} x.y = x,\ yz = y \implies x.z &= (x.y)z \\ &= x.(yz) \\ &= xy \\ &= x \end{aligned}$$

یعنی $x.z = x$ در نتیجه $x \leq z$ یعنی خاصیت انتقالی نیز برقرار است.

قضیه. عبارات زیر در یک جبر بول معادلند:

الف) $x + y = y$ ب) $xy = x$

ج) $x' + y = ۱$ د) $xy' = ۰$

برهان. به عنوان تمرین به عهده دانشجو گذاشته می‌شود.

حال هرکدام از چهار عبارت معادل بالا را می‌توان برای تعریف رابطه ترتیبی جزئی در یک جبر بول به کار برد.

مثال. جبر بول مجموعه‌ها را در نظر بگیرید. رابطه کوچکتری را به عنوان زیرمجموعه بودن تعریف کنید آنگاه عبارات زیر معادلند. (قضیه بالا)

تعریف. یک عبارت بولی عبارت است از هر متغیر یا عبارتی که از به کار بردن اعمال بولی + و ۰و (′) روی متغیرها حاصل شده باشد.

مثال. هرکدام از عبارات زیر یک عبارت بولی هستند:

$$(x + y'z')' + xy' \qquad (xy'z' + y) + (x + y)'$$

هرکدام از x یا x' را یک لفظ (literal) می‌نامیم.

تعریف. یک حاصلضرب بنیادی عبارت است از یک لفظ (متغیر) یا حاصلضربی از دو یا چند متغیر که شامل خود و متمم هیچ متغیری (به طور تکراری) نباشد.

مثال. عبارات xyz'، $x'y'$، x، x'، حاصلضربهای بنیادی هستند در حالی که xyx' یا $xyzy$ حاصلضربهای بنیادی نیستند. زیرا اولی شامل x و x' و دومی شامل دوبار y است.

$$A \cup B = B,\ A \cap B = A\ A^C \cup B = \cup\ A \cap B^C = \phi$$

مثال. جبر بول $D_{۷۰}$ در مثالهای گذشته را در نظر بگیرید اگر $a \leq b$ را به معنی $a|b$ در نظر بگیریم خواهیم داشت $(a,b) = a$ و $[a,b] = b$.

۳-۲۸ قضیه نمایش

تعریف. فرض کنیم B یک جبر بول متناهی باشد. یک اتم در B عضوی است که بین آن عضو هر $\circ$ جبر عضوی وجود نداشته باشد.

مثال. در جبر بول $D_{۷۰}$ اتمها عبارتند از ۲، ۵ و ۷.

مثال. در جبر بول $\cup$ که در آن $\cup$ مجموعه تمام زیرمجموعه‌های مجموعه معینی مانند A باشد و اعمال $+$و $\circ$ و $'$ به ترتیب اجتماع و اشتراک و متمم‌گیری مجموعه‌هاست، اتمها زیرمجموعه‌های تک عضوی A خواهند بود.

قضیه نمایش. فرض کنیم B یک جبر بول و A مجموعه اتمهای B باشد و $P(A)$ جبر بول تمام زیرمجموعه‌های A باشد. آنگاه هر عضو غیر صفر B به طور منحصر بفردی به صورت مجموعی (اجتماعی) از اعضای A نوشته می‌شود.

مثال. در جبر بول $D_{۷۰}$ هر کدام از اعضای ۱۴ و ۳۵و ۷۰ را به صورت مجموعی از اتمها می‌نویسیم:

$$۷۰ = [۲,۵,۷] = ۲ + ۵ + ۷$$

$$۳۵ = [۵,۷] = ۵ + ۷$$

$$۱۴ = [۲,۷] = ۲ + ۷$$

۳-۲۹ کاربرد جبر بول در کامپیوتر

جبر بول برای بررسی و تشریح عملیات شبکه‌های پیچیده در مدارهای دیجیتال به کار می‌رود. طراحان سیستمهای دیجیتال از جبر بول برای تبدیل اشکال مدارها به عبارات جبری و بر عکس استفاده می‌کنند.

مدارهای منطقی در اثر ورودی‌های مناسبی، تولید کننده یک سری اعمال منطقی می‌باشند که در این فصل به بررسی آن می‌پردازیم.

مدارهای منطقی اعمال منطقی **And**، **or** و **not** را مانند گزاره‌ها اجرا می‌کنند. این مدارها که گیت[۱۵] یا دریچه نیز نامیده می‌شوند، در مقابل ورودی‌ها که ۰ یا ۱ و یا ترکیبی از آنهاست، خروجی ۰ یا ۱ تولید می‌کنند. جبر بول در تحلیل این مدارها به طور گسترده‌ای مورد استفاده واقع می‌شود. در حالت ابتدایی و ساده‌تر، جبر کلیدی را برای بیان کاربردهای جبر بول در کامپیوتر مورد استفاده قرار می‌دهیم.

یک مدار شامل مولد، لامپ، سیم و کلید را در نظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم مولد درست کار کند و لامپ سالم باشد و سیم‌ها هیچ عیب و ایرادی نداشته باشند. می‌دانیم که هر کلید برق دارای دو وضعیت باز و بسته است. این دو وضعیت را مانند درست و نادرست بودن گزاره‌ها در نظر می‌گیریم. برای کلید بسته ارزش ۱ و برای کلید باز ارزش صفر را در نظر می‌گیریم.

کلید باز کلید بسته

در نتیجه یک کلید باز با یک بسته همان رابطه را خواهد داشت که یک گزاره با متمم خود دارد. جدول درستی یک کلید را می‌توان به صورت زیر نوشت:

15) gate

x
!

هرگاه x^c را متمم x بنامیم آنگاه مشابه گزاره‌ها برای این دو کلید جدول زیر را خواهیم داشت:

x	x^c
۱	۰
۰	۱

حال سؤالی که ممکن است پیش آید این است که آیا برای ترکیب گزاره‌ها نیز می‌توان مصداق کلیدی پیدا کرد؟ جواب مثبت است. هرگاه x را متناظر گزاره‌ای بگیریم که باز بودن x به معنی نادرست بودن گزاره و بسته بودن x به معنی درست بودن آن گزاره باشد و y نیز مانند x فرض شود آنگاه می‌توانیم اعمال ترکیب عطفی و فصلی و نقیض یک گزاره را با اعمال $+$ و $\circ$ و c بین کلیدها مشابه سازی کنیم.

عمل ضرب $(\cdot)$ را بین x و y با جدول زیر تعریف می‌کنیم

x	y	$x.y$
۱	۱	۱
۱	۰	۰
۰	۱	۰
۰	۰	۰

از نظر عملی این جدول را می‌توان نشان دهنده ترکیب متوالی دو کلید در نظر گرفت. بدیهی است

بین دو نقطه A و B جریان وقتی برقرار می‌شود که هر دو کلید x و y بسته باشد.

بدین ترتیب عمل جمع $(+)$ را نیز می‌توان مشابه ترکیب فصلی به کار برد:

x	y	$x+y$
۱	۱	۱
۱	۰	۱
۰	۱	۱
۰	۰	۰

بین A و B جریان وقتی برقرار می‌شود که حداقل یکی از دو کلید x و y بسته باشد. این ترکیب، ترکیب موازی x با y است.

همان‌طور که از ترکیب گزاره‌های مرکب گزاره‌های پیچیده‌تری می‌توان به دست آورد، ترکیب‌های جدیدی از کلیدها نیز حاصل می‌شود. مانند: که بنابر تعریفی برای جمع و ضرب کلیدها ارائه دادیم

این مدارها را به عبارات

$$x.y+z \quad \text{و} \quad (x+y)+z$$

نمایش می‌دهیم.

به سادگی می‌توان دیدکه به هر مداری یک عبارت متناظر است و به هر عبارتی که شامل تنها نمادهای $+$ و $\circ$ باشد، یک مدار متناظر می‌گردد.

تعریف. عبارتی که نشان دهندهٔ یک مدار است (یا متناظر با آن است) را عبارت بولی یا تابع بولی آن مدار گفته می‌شود.

مثال. تابع بولی مدار زیر را به دست آورید.

$$f = (xyz) + (x'(y + z'))$$

بدیهی است هرگاه $f = ۱$ جریان بین A و B برقرار است و اگر $f = ۰$ جریان برقرار نیست. رسم مداری که عبارت بولی آن داده شده است.

دیدیم که $x.y$ نشان دهنده ترکیب متوالی x با y و $x + y$ نشان دهنده ترکیب موازی آنهاست. حال اگر عبارتی داده شده باشد می‌توان مدار مربوط به آن را رسم نمود.

مثال. مدار عبارت

$$f = ab + ac + ad + bc + bd$$

ساده کردن مدارها. همان طور که یک عبارت جبری معمولی را با ضرب کردن پرانتزها یا فاکتورگیری می‌توان ساده کرد، در مورد مدارها نیز این کار امکان پذیر است. با ساده کردن عبارت بولی یک مدار، خود مدار نیز ساده می‌شود:

$$\begin{aligned} f &= ab + ac + ad + bc + bd = ab + a(c+d) + b(c+d) \\ &= ab + (a+b)(c+d) \end{aligned}$$

که مدار متناظر آن به صورت زیر در می‌آید: ملاحظه می‌شود این مدار ساده‌تر از مدار قبلی است.

مدارهای منطقی که اعمال منطقی **AND** و **OR** و **NOT** را اجرا می‌کنند در علوم کامپیوتر با نمادهای زیر نشان داده می‌شوند. این مدارها گیت نامیده می‌شود. مدار **NOT** گاهی وارونگر

نیز نامیده می‌شود. سیگنالهای ورودی X و Y درگیت‌های با دو ورودی می‌توانند یکی از چهار

حالت ممکن ۰۰ و ۰۱ و ۱۰ و ۱۱ باشند. خروجی را در هر حالت می‌توان از جدول زیر به دست آورد:

x	y	$x.y$	$x+y$	x'
۱	۱	۱	۱	۰
۱	۰	۰	۱	۰
۰	۱	۰	۱	۱
۰	۰	۰	۰	۱

گیت‌های دیگری نیز در مدارهای کامپیوتری به کار می‌روند که عبارتند **NAND**، **NOR**، **XOR**، **XNOR**.

تابع **NAND** مکمل **AND** می‌باشد و تابع **NOR** مکمل **OR** است. تابع **XOR** که در منطق ریاضی به عنوان یای فصلی از آن یاد می‌شود وقتی خروجی ۱ تولید می‌کند که دو ورودی آن غیر هم ارزش باشند و **XNOR** که مکمل آن است با ورودی‌های یکسان ۱ و با ورودی‌های غیر یکسان صفر تولید می‌کند. جدول درستی و نمودار مداری این توابع به صورت زیر است.

x	y	x	y	x	**NAN**
۱	۱	۱	۰	۰	۱
۱	۰	۰	۱	۱	۰
۰	۱	۰	۱	۱	۰
۰	۰	۰	۱	۰	۱

مثال. جدول درستی عبارت $P = (x.y + z)'$ را به دست آورید.

x	y	z	$x.y$	$xy+z$	$(x.y+z)'$
۱	۱	۱	۱	۱	۰
۱	۱	۰	۱	۱	۰
۱	۰	۱	۰	۱	۰
۰	۰	۰	۱	۰	۱
۰	۱	۱	۰	۱	۰
۰	۱	۰	۰	۰	۱
۰	۰	۱	۰	۱	۰
۰	۰	۰	۰	۰	۱

تمرین. جدول درستی عبارت زیر را بنویسید.

$$(x+y).z$$

$$(x+y)'.z$$

$$(xy')+z$$

$$(x'+y).z$$

فصل چهارم

اعداد اصلی و اصول هم‌ارزی

۴-۱ اعداد اصلی

عدد چه مفهومی دارد؟ آیا می‌توان عدد را تعریف کرد؟ اغلب دانشجویان در درس هندسه دبیرستانی به این نکته پی برده‌اند که همه چیز را نمی‌توان تعریف کرد. اعداد نیز از این گونه مفاهیم هستند. آنها قابل تعریف نیستند. امّا سؤال اصلی این نیست که که اشیائی را که نمی‌توانیم تعریف کنیم، چگونه بکار ببریم؟

دو هزار سال پیش، اقلیدس بی‌آنکه بتواند اشیائی را به خوبی بشناسد و تعریف کند، بکار برد. او نقطه و خط و دایره و زاویه قائمه را به خوبی بکار برد و بیش از صد قضیه در مورد آنها اثبات کرد بی آنکه آنها را تعریف کند. در واقع اقلیدس چنین امری را به کمک « اصول موضوع[1] پنج گانه‌خود» انجام داد. اصول موضوع در واقع قالب‌هایی هستند که ما آنها را چنان می‌سازیم که «مفاهیم تعریف نشده» در آن قالب‌ها جای می‌گیرند و چون ماهیت قالب‌ها را که خود ساخته‌ایم به خوبی می‌دانیم، این مفاهیم خواص خود را بروز می‌دهند. مثلاً گرچه نمی‌توان نقطه را تعریف کرد امّا به کمک اصل موضوع اوّل اقلیدس می‌توان به این خصوصیت پی برد که از هر دو نقطه

1) Axioms

یک خط می‌گذرد و این خود شناختی نسبی از خواص نقطه را بر ما معلوم می‌کند. شاید یک دلیل عمده برتری مفاهیم اصولی این باشد که وقتی ما یک مفهوم را «تعریف » می‌کنیم به نوعی آن را مقید به قیود کرده و از کلیت آن می‌کاهیم و این امر امکان نگرش جامع را از ما می‌گیرد. شاید هرگاه اقلیدس خط را آنگونه که ما «راست» می‌انگاریم به وضوح تعریف می‌کرد و صفت «راستی» خط را روشن می‌کرد هرگز دو هزار سال بعد هندسه دان روسی لباچفسکی[2] نمی‌توانست هندسه نااقلیدسی را کشف کند که در آن خط‌وط آنگونه که در هندسه اقلیدسی «راست» هستند، نمی‌باشند. دانشجویانی که به مباحث اصولی علاقه‌مندند می‌توانند به کتاب فلسفه علم ریاضی تألیف دکتر محمدحسن بیژن‌زاده، انتشارات دانشگاه پیام نور مراجعه نمایند.

اعداد به طور کلی به دو دسته تقسیم می‌شوند. اعداد اصلی و اعداد ترتیبی. اعداد اصلی برای اوّلین بار توسط ریاضیدان آلمانی گئورگ کانتور[3] (جرج کانتور) معرفی شدند، آنچه که ریاضیدانان بزرگ در آن زمان نتواستند آن را بپذیرند و در این رهگذر عرصه را بر کانتور تنگ کردند. بنابراین شما نیز در مرحلهٔ اوّل اگر نتوانستید این مفاهیم را به سادگی درک کنید مأیوس نشوید.

ما هرگز اعداد اصلی را تعریف نمی‌کنیم (در واقع نمی‌توانیم) امّا به شما یاد می‌دهیم که چگونه از آنهااستفاده کنید. همان طوری که در دبیرستان توانستید از نقطه و خط استفاده کنید بی آنکه آنها را تعریف کنید، کافیست قاعده بازی با نقطه و خط را به کمک اصول پنج گانه اقلیدس بشناسید.

مانیز برای بازی با اعداد اصلی قواعدی داریم که عبارتند از:

الف: برای هر مجموعه دلخواه A یک عدد اصلی متناظر می‌شود و آن را با نماد $\operatorname{Card} A$ (بخوانید کاردینال A) نشان می‌دهیم.

ب: $\operatorname{Card} A = 0$ اگر و فقط اگر $A = \phi$.

ج: اگر $A \neq \phi$ و متناهی باشد $\operatorname{Card} A$ برابر است با تعداد اعضای مجموعه A.

د: برای هر دو مجموعه A و B، $\operatorname{Card} A = \operatorname{Card} B$ اگر و فقط اگر A و B همعدد باشند یعنی تناظری یک به یک بین A و B وجود داشته باشد و می‌نویسیم $A \simeq B$.

2) – 3) Georg Contor

تذکر. قاعده ج عدد اصلی مجموعه‌های متناهی را به طور کامل تعریف می‌کند. امّا قواعد فوق شناخت زیادی از اعداد اصلی مجموعه‌های نامتناهی بدست نمی‌دهد. این نقیصه با ارائه قضایای بعدی به تدریج رفع خواهد شد.

عدد اصلی یک مجموعه متناهی را عدد اصلی متناهی و عدد اصلی یک مجموعه نامتناهی را عدد اصلی نامتناهی یا ترانسفینی می‌نامند. اعداد اصلی متناهی مطابق با طبیعت ذاتی‌شان باهم قابل مقایسه‌اند:

$$۰ < ۱ < ۲ < \cdots < k < k+۱ < \cdots$$

برای مقایسه اعداد اصلی نامتناهی به تعریف زیر نیازمندیم.

۴-۱-۱ تعریف. A و B را دو مجموعه دلخواه در نظر بگیرید. $\operatorname{Card} A$ کوچکتر یا مساوی $\operatorname{Card} B$ است هرگاه مجموعه A با یک زیرمجموعه B همعدد باشد و می‌نویسیم $\operatorname{Card} A \leq \operatorname{Card} B$. هرگاه $\operatorname{Card} A \leq \operatorname{Card} B$ و $\operatorname{Card} A \neq \operatorname{Card} B$، می‌نویسیم $\operatorname{Card} A < \operatorname{Card} B$. مثال $\operatorname{Card} N \leq \operatorname{Card} Z$ و $\operatorname{Card} N < \operatorname{Card} \mathbb{R}$.

تمرین.

۱) نشان دهید $\operatorname{Card} ardN = \operatorname{Card} Z = \operatorname{Card} Q = \operatorname{Card} Q \times Q$

(راهنمایی: به مطالب فصول قبل در مورد مجموعه‌های شمارا مراجعه کنید)

۲) فرض کنید A یک مجموعه باشد و $x \notin A$. ثابت کنید اگر $\operatorname{Card}(A \cup \{x\}) = \operatorname{Card} A$ آنگاه A متناهی است.

۳) ثابت کنید اگر $\operatorname{Card} A = \operatorname{Card} B = \operatorname{Card} N$ آنگاه $\operatorname{Card}(A \cup B) = \operatorname{Card} B$

(راهنمایی: از خاصیت N، متشکل از اعداد زوج و فرد استفاده کنید.)

۴) با فرض $N^۱ = N$ و $N^{n+۱} = N^n \times N$ ثابت کنید.

الف) $k \in N$ و $\operatorname{Card} N^k = \operatorname{Card} N$

ب) $\operatorname{Card} \bigcup_{k \in N} N^k = \operatorname{Card} N$

۵) هرگاه $B \subseteq A$ و $B \simeq B \cup C$ آنگاه $A \simeq A \cup C$

۲-۱-۴ قضیه شرودر برنشتاین. هرگاه مجموعه A با یک زیرمجموعه B همعدد باشد و B نیز با یک زیرمجموعه A همعدد باشد، $\operatorname{Card} A$ و $\operatorname{Card} B$ را چگونه می‌توان مقایسه کرد؟ کانتور برای اوّلین بار به این مسئله اندیشید و حدس زد که آنها با هم برابرند بعدها در سال ۱۸۹۰ شرودر[4] و برنشتاین[5] این حدس کانتور را ثابت کردند. این قضیه به قضیه شرودر-برنشتاین معروف است.

قضیه (قضیه شرودر-برنشتاین). هرگاه A با یک زیرمجموعه B و B با یک زیرمجموعه A همعدد باشد، آنگاه A و B همعدد هستند.

به دلیل طولانی بودن برهان ابتدا لمی را ثابت می‌کنیم و سپس قضیه را از آن نتیجه می‌گیریم.

لم. اگر B یک زیرمجموعه A باشد و یک تابع یک به یک مانند $f : A \longrightarrow B$ وجود داشته باشد، آنگاه $h : A \sim B$ یک تناظر یک به یک بین A و B خواهد بود و در نتیجه A و B همعدد هستند.

اثبات. هرگاه B خود A باشد، h تابع همانی است. بنابراین B را زیرمجموعه سره A می‌گیریم. هرگاه $C = \bigcup_{n \geq 0} f^n(A-B)$ باشد، که در آن f^0 تابع همانی روی A است و $f^k(x) = f(f^{k-1}(x))$.
تابع $h(z)$ را برای هر z در A به شکل زیر تعریف می‌کنیم.

$$h(z) = \begin{cases} f(z) & z \in C \quad \text{اگر} \\ z & z \in A - C \quad \text{اگر} \end{cases}$$

باید توجه داشت که $A - B$ زیرمجموعه C است و $f(C) \subseteq C$ و هرگاه m و n دو عدد صحیح نامنفی متمایز $m < n$، آنگاه $f^m(A-B)$ و $f^n(A-B)$ دو مجموعه مجزا هستند.
زیرا اگر x و x' در $A - B$ بوده و $f^m(x) = f^n(x')$، آنگاه

$$f^{n-m}(x') = x \in B \cap (A - B)$$

4) E. Schröder 5) F. Bernstein

که یک تناقض است $(B \cap (A - B) = \phi)$. حال

$$\begin{aligned} h(A) &= (A - C) \cup f(C) \\ &= [A - \bigcup_{n \geq 0} f^n(A - B)] \cup f(\bigcup_{n \geq 0} f^n(A - B)) \\ &= [A - \bigcup_{n \geq 0} f^n(A - B)] \cup [\bigcup_{n \geq} f^n(A - B)] = A - (A - B) = B \end{aligned}$$

و چون f یک به یک است، بنابراین $h : A \longrightarrow B$ دوسوئی است و بنابراین برهان لم کامل می‌شود.

درشکل زیر برای اثبات برهان فوق مجموعه A را تمام مستطیلها در نظر بگیرید و استدلال را از روی شکل دنبال کنید.

برهان قضیه شرودربرنشتاین. اگر A_0 و B_0 زیرمجموعه‌های A و B باشند که $A \sim B_0$ و $B \sim A_0$ و $f_0 L : A \sim B_0$ و $g_0 : B \sim A_0$ دو نگاشت دوسوئی باشند، تابع $f : A \longrightarrow A_0$ را با $f(x) = g_0(f_0(x))$ تعریف می‌کنیم که یک نگاشت یک به یک است.

درنتیجه بنابه لم فوق یک دوسوئی مانند $h : A \sim A_0$ وجود دارد. در نتیجه $g_0^{-1} \circ h : A \sim B$ ترکیب دوسوئی $h : A \sim A_0$ و $g_0^{-1} : A_0 \sim B$ بوده و یک دوسوئی است.

نتیجه. اگر A و B دو مجموعه باشند که $\operatorname{Card} A \leq \operatorname{Card} B$ و $\operatorname{Card} B \leq \operatorname{Card} A$، آنگاه $\operatorname{Card} A = \operatorname{Card} B$.

۴-۱-۳ قضیه کانتور. هرگاه X یک مجموعه دلخواه باشد $\mathcal{P}(X)$، مجموعه توانی X، مجموعه تمام زیر مجموعه‌های X است. کانتور ثابت کرد همواره $\operatorname{Card} X < \operatorname{Card} \mathcal{P}(X)$.

قضیه. (قضیه کانتور). اگر X یک مجموعه باشد، $\operatorname{Card} X < \operatorname{Card} \mathcal{P}(X)$.

برهان.. اگر $X = \phi$ آنگاه $\operatorname{Card}(\phi) = ۰ < ۱ = \operatorname{Card} p(\phi)$

فرض می‌کنیم $X \neq \phi$. تابع $g : X \longrightarrow \mathcal{P}(X)$ را با ضابطه $g(x) = \{x\} \in \mathcal{P}(X)$ به ازای هر $x \in X$، تعریف می‌کنیم این تابع یک به یک است. در نتیجه مجموعه X با زیرمجموعه $\{\{x\}|x \in X\}$ از $\mathcal{P}(X)$ همعدد است. یعنی $\operatorname{Card} X \leq \operatorname{Card} \mathcal{P}(X)$.

حال نشان می‌دهیم $\operatorname{Card} X < \operatorname{Card} \mathcal{P}(X)$ و کافی است نشان دهیم X و $\mathcal{P}(X)$ همعدد نیستند. فرض خلف را یکار برده و گیریم یک تابع دوسوئی مانند f بین X و $\mathcal{P}(X)$ وجود دارد. فرض کنید $S = \{x \in X | x \notin f(x)\}$. این مجموعه عبارت است از تمام عنصرهای X که در برد خودشان تحت f نیستند. چون $s \in \mathcal{P}(X)$ و $f : X \longrightarrow \mathcal{P}(X)$ دوسوئی است پس عنصر $e \in X$ وجود دارد که $f(e) = S$. حال یا $e \in S$ یا $e \notin S$. در هر دو حالت به تناقض می‌رسیم.

حالت ۱. $e \in S$. بنابه تعریف S، $e \notin f(e)$ و این غیر ممکن است زیرا $f(e) = S$ و $e \in S$.

حالت ۲. $e \notin S$. چون $f(e) = S$، پس $e \notin f(e)$ در نتیجه بنا به تعریف S، $e \in S$ و در نتیجه $e \in f(e)$. و این نیز غیر ممکن است.

تناقض حاصل در هر دو حالت فرض خلف را باطل و برهان قضیه را کامل می‌کند. قضیه کانتور سؤال بسیار مهمی را به دنبال دارد و آن این که آیا یک مجموعه و مجموعه توانی دارای کاردینالهای بلافصل هستند، یا به عبارت دیگر آیا بین $\operatorname{Card} X$ و $\operatorname{Card} \mathcal{P}(X)$ عدد اصلی دیگری وجود دارد؟ مسئلهٔ فوق را که تاکنون جوابی برای آن داده نشده است، در مورد اعداد طبیعی آن را فرضیه پیوستار می‌نامند و در حالت کلی برای مجموعه دلخواه X، آن را فرضیه پیوستار تعمیم یافته می‌نامند. (فرضیه‌ها عبارتی هستند که نمی‌توان آنها را ثابت یا رد کرد، امّا می‌توانیم آنها را بپذیریم که در این صورت به یک ساختار سازگار از قضایا دست می‌یابیم و البته می‌توانیم آنها را نپذیریم یا اینکه جایگزینی بر آنها پیدا کنیم.)

تمرین.

۱) هرگاه n یک عدد اصلی متناهی باشد، ثابت کنید $n < \operatorname{Card} N$.

۲) هرگاه a یک عدد اصلی ترامتناهی باشد، ثابت کنید $\operatorname{Card} N \leq a$.

(راهنمایی: هر مجموعهٔ نامتناهی دارای یک زیرمجموعه شمارا نامتناهی است.)

۳) نشان دهید $\operatorname{Card} N < \operatorname{Card} R$.

۴) هرگاه A یک مجموعه و $x \notin A$، اگر $\operatorname{Card} A < \operatorname{Card}(A \cup \{x\})$ آنگاه A متناهی است.

(راهنمایی: با فرض خلف A نامتناهی، ثابت کنید $\operatorname{Card} A = \operatorname{Card}(A \cup \{x\})$)

۵) ثابت کنید بزرگترین عدد اصلی وجود ندارد.

۶) هرگاه A و B دو مجموعه همعدد باشد، ثابت کنید $\operatorname{Card} cP(A) = \operatorname{Card} \mathcal{P}(B)$

(راهنمایی: از فرضیه پیوستار استفاده کنید)

۷) هرگاه A یک مجموعه شمارای نامتناهی باشد، ثابت کنید $\mathcal{P}(A)$ ناشمارا است.

(راهنمایی: از فرضیه پیوستار استفاده کنید)

۸) ثابت کنید تمام زیرمجموعه‌های نامتناهی N شماراست.

(راهنمایی: به ویژگی مجموعه‌های شمارای نامتناهی توجه کنید)

۹) ثابت کنید مجموعه تمام مجموعه‌ها وجود ندارد.

(راهنمایی: از قضیه کانتور استفاده کنید)

۱۰) ثابت کنید دنباله مرتب از اعداد اصلی وجود دارد. (راهنمایی: از قضیه کانتور و فرضیه پیوستار استفاده کنید)

۱۱) دو مجموعه A و B را در نظر بگیرید. ثابت کنید $\operatorname{Card} A \leq \operatorname{Card} B$ اگر و فقط اگر یک تابع یک به یک $f : A \longrightarrow B$ وجود داشته باشد.

۴-۲ حساب اعداد اصلی

جمع اعداد اصلی متناهی همان جمع اعداد طبیعی است که در دبستان با آن آشنا شده‌اید امّا جمع اعداد اصلی نامتناهی کمی متفاوت است. اینک می‌خواهیم جمعی را برای اعداد اصلی تعریف

کنیم که در حالت متناهی با جمع اعداد متناهی سازگار باشد.

۴-۲-۱ تعریف. هرگاه a و b دو عدد اصلی باشند، مجموع اصلی a و b را که با $a+b$ نشان می‌دهیم، عدد اصلی $\mathrm{Card}(A \cup B)$ در نظر می‌گیریم به طوری که $A \cap B = \phi$ و $\mathrm{Card}\, A = a$ و $\mathrm{Card}\, B = b$.

تذکر. شرط $A \cap B = \phi$ در تعریف فوق ضروری است. در صورتی که A و B مجزا نباشند به سادگی می‌توان مجموعه‌های $C = A \times \{۰\}$ و $D = B \times \{۱\}$ را ساخت که $A \sim C$ و $B \sim D$ باشد و C و D مجزا باشند.

قرارداد. به پیروی از کانتور عدد اصلی نامتناهی مجموعه N را با $\aleph_۰$ (بخوانید الف-صفر) و عدد اصلی نامتناهی مجموعه $\mathbb{R}$ را با C نشان می‌دهیم، یعنی $\mathrm{Card}\, R = C$ و $\mathrm{Card}\, N = \aleph_۰$.
مثالهای زیر خصوصیات متفاوت اعداد اصلی را نشان می‌دهند.

۴-۲-۲ مثال. $\aleph_۰ + \aleph_۰ = \aleph_۰$.

حل: $\aleph_۰$ و $\aleph_۰$ را کاردینال اعداد طبیعی زوج و فرد می‌انگاریم، داریم

$$\begin{aligned}\aleph_۰ + \aleph_۰ &= \mathrm{Card}(\text{اعداد طبیعی زوج} \cup \text{اعداد طبیعی فرد})\\ &= \mathrm{Card}\, N\\ &= \aleph_۰\end{aligned}$$

۴-۲-۳ مثال. $\aleph_۰ + C = ۰$.

حل: همان طوری که قبلاً دیدیم بازه $(۰\,,۱)$ و $\mathbb{R}$ همعدد هستند. بنابراین

$$\mathrm{Card}(۰\,,۱) = \mathrm{Card}\, \mathbb{R} = C$$

قرار می‌دهیم $A = N \cup (۰\,,۱)$. داریم

$$\mathrm{Card}\, A = \aleph_۰ + C$$

امّا $R \sim (0,1) \subset A$ و $A \sim A \subset R$. بنابه قضیه شرودربرنشتاین $A \sim R$ و بنابراین $\aleph_0 + C = C$. جمع اعداد اصلی در خواص جابجایی و شرکت پذیری صدق می‌کنند یعنی اگر x وy و z سه عدد اصلی باشند

$$x + y = y + x$$

$$(x + y) + z = x + (y + z)$$

تمرین.

۱) برای هر عدد اصلی a ثابت کنید $a + 0 = a$

۲) برای هر عدد اصلی a و b ثابت کنید $a + b = b + a$

۳) برای هر سه عدد اصلی a وb و c ثابت کنید $(a + b) + c = a + (b + c)$

۴) هرگاه n عدد اصلی متناهی باشد ثابت کنید $n + \aleph_0 = \aleph_0$ و $n + c = c$

۵) ثابت کنید $C + C = C$

۶) هرگاه a یک عدد اصلی ترامتناهی باشد، ثابت کنید $a + 1 = a$

(راهنمایی: از قضیه شرودربرنشتاین استفاده کنید)

۷) هرگاه n یک عدد اصلی متناهی و a یک عدد اصلی ترامتناهی باشد، آنگاه $a + n = a$.

۴-۳ ضرب اعداد اصلی

همانند تعریف جمع، ضرب اعداد اصلی را سازگار با ضرب معمولی اعداد صحیح نامنفی به گونه زیر ارائه می‌دهیم.

تعریف. برای هر دو عدد اصلی a و b، حاصلضرب اصلی ab، عدد اصلی حاصلضرب (دکارتی $A \times B$ تعریف می‌شود که در آن $\operatorname{Card} A = a$ و $\operatorname{Card} B = b$)

تذکر. بر خلاف تعریف جمع نیازی به مجزا بودن دو مجموعه A و B وجود ندارد.

۴-۳-۱ مثال. $1x = x$

حل: حاصلضرب دکارتی $\{1\} \times A$ همعدد با A است. بنابراین $1x = x$.

۴-۳-۲ مثال. $0x = 0$

حل: $\phi \times A = \phi$ بنابراین $0x = 0$

۴-۳-۳ مثال. $\aleph_0 \aleph_0 = \aleph_0$

حل: $N \times N \sim N$ بنابراین $\aleph_0 \aleph_0 = \aleph_0$

۴-۳-۴ مثال $CC = C$

حل: $R \sim (0,1)$. حال نشان می‌دهیم یک نگاشت یک به یک از $(0,1) \times (0,1)$ به $(0,1)$ وجود دارد و این ثابت می‌کند $CC \leq C$. برای این کار به هر $x \in (0,1)$ با بسط اعشاری نامتناهی (در صورتی که بسط متناهی باشد آن را به شکل نامتناهی در می‌آوریم مثلاً $\frac{1}{2}$ را با $0/4999\cdots$ نشان می‌دهیم) تابع $f : (0,1) \times (0,1) \longrightarrow (0,1)$ با ضابطه

$$f(0.x_1x_2x_3\cdots, 0.y_1y_2y_3\cdots) = 0.x_1y_1x_2y_2\cdots$$

تعریف می‌کنیم. این ثابت می‌کند $CC \leq C$ است. برای اثبات این که $C \leq CC$ است با روشی مشابه تابع f را به صورت یک به یک به شکل

$$f(0.x_1x_2x_3\cdots) = (0.x_1x_2x_3\cdots, 0.x_1x_2x_3\cdots)$$

تعریف می‌کنیم.

تمرین.

۱) هرگاه x و y و z سه عدد اصلی و $x \leq y$ باشد، ثابت کنید $xz \leq yz$.

۲) هرگاه x و y و z سه عدد اصلی و $x < y$ و $z = 0$ آنگاه، آیا می‌توان ادعا کرد $xz < yz$؟

۳) اگر n یک عدد اصلی متناهی باشد، ثابت کنید هرگاه $n \neq 0$، آنگاه $n\aleph_0 = \aleph_0$.

۴) هرگاه x و y اعداد اصلی و $xy = 0$، آنگاه ثابت کنید $x = 0$ یا $y = 0$.

۵) هرگاه x و y اعداد اصلی و $xy = 1$، آنگاه ثابت کنید $x = 1$ یا $y = 1$.

۶) هرگاه x یک عدد اصلی و n یک عدد اصلی متناهی باشد، ثابت کنید $nx = \underbrace{x + x + \cdots , x}_{n \text{ بار}}$.

۷) هرگاه x و y و z اعداد اصلی و $x = y$، آنگاه ثابت کنید $xz = yz$.

۴-۴ توان اعداد اصلی

تعریف توان برای اعداد اصلی با شیوه‌ای متفاوت با تعریف جمع و ضرب ارائه می‌شود.

۴-۴-۱ تعریف. هرگاه a و b دو عدد اصلی و $a \neq 0$ باشد و $\operatorname{Card} A = a$ و $\operatorname{Card} B = b$، B^A را مجموعه تمام توابع از A به B در نظر می‌گیریم. b^a را $\operatorname{Card} B^A$ تعریف می‌کنیم.

۴-۴-۲ مثال. $\operatorname{Card} \mathcal{P}(A)$

حل: فرض کنید $B = \{0, 1\}$. برای هر زیرمجموعه A مانند D، تابع مشخصه $\chi_D : A \longrightarrow B$ را با ضابطه $\chi_D(x) = \begin{cases} 0 & x \notin D \\ 1 & x \in D \end{cases}$ نظیر می‌کنیم.

تابعی از $\mathcal{P}(A)$ به B^A که D را به χ_D می‌برد تناظری یک به یک است. بنابراین مجموعه‌های $\mathcal{P}(A)$ و B^A دارای اعداد اصلی یکسان هستند. یعنی $\operatorname{Card} \mathcal{P}(A) = \operatorname{Card} B^A = 2^{\operatorname{Card} A}$.

۴-۴-۳ قضیه. هرگاه a و b و c اعداد اصلی باشند آنگاه $a^b a^c = a^{b+c}$.

اثبات: مجموعه‌های A و B و C را چنان می‌گیریم که $\operatorname{Card} A = a$، $\operatorname{Card} B = b$ و $\operatorname{Card} C = c$ و $B \cap C = \phi$. داریم $\operatorname{Card}(B \cup C) = b + c$. نشان می‌دهیم $A^B \times A^C$ و $A^{B\cup C}$ همعدد هستند. برای این کار به هر زوج (f, g) که $f \in A^B$ و $g \in A^C$، تابع $f \cup g \in A^{B\cup C}$ را نظیر می‌کنیم. این تناظر یک همعددی بین مجموعه‌های $A^{B\cup C}$ و $A^B \times A^C$ بوجود می‌آورد و این ثابت می‌کند $a^b a^c = a^{b+c}$.

دو قضیه زیر را بدون اثبات می‌پذیریم.

۴-۴-۴ قضیه. اگر a و b و c اعداد اصلی باشند، $(a^b)^c = a^{bc}$.

۴-۴-۵ قضیه. اگر a و b و c اعداد اصلی باشند، $(ab)^c = a^c b^c$.

۴-۴-۶ قضیه. $۲^{\aleph_۰} = C$

اثبات. ابتدا ثابت می‌کنیم $C \leq ۲^{\aleph_۰}$. بدین منظور نگاشت $f : R \longrightarrow \mathcal{P}(Q)$ را با

$$f(a) = \{x \in Q : x < a\} \qquad \forall a \in R$$

در نظر می‌گیریم. این تابع یک به یک است زیرا اگر $a < b$ دو عدد حقیقی باشند آنگاه عدد گویای r، وجود دارد که $a < r < b$ (اعداد گویا در R چگال هستند). حال $r \in f(b)$ ولی $r \notin f(a)$. بنابراین f یک به یک است. حال بنابه تمرین ۱۱ بخش .... و مثال ..... (قبل) داریم

$$C \leq \operatorname{Card} \mathcal{P}(Q) = ۲^{\aleph_۰}$$

حال ثابت می‌کنیم $۲^{\aleph_۰} \leq C$.

برای این کار نگاشت $g : \{۰, ۱\}^N \longrightarrow R$ را با ضابطه

$$g(f) = ۰.f_{(۱)} f_{(۲)} f_{(۳)} \cdots$$

که در آن $f \in \{۰, ۱\}^N$ تعریف می‌کنیم. $g(f)$ یک عدد اعشاری متشکل از صفر و یک است. اگر $f, h \in \{۰, ۱\}^N$ و $f \neq h$، آنگاه $g(f) \neq g(h)$ زیرا رقمهای اعشاری $g(f)$ و $g(h)$ متمایز

هستند زیرا حداقل یک $n \in N$ وجود دارد که $f(n) \neq h(n)$ و در نتیجه $g(f) \neq g(h)$.
بنابراین $g : \{۰, ۱\}^N \longrightarrow R$ یک به یک است و در نتیجه $۲^{\aleph_۰} \leq C$.

۷-۴-۴ نتیجه. $\aleph_۰ < C$

اثبات. بنا به قضیه کانتور $\operatorname{Card} N < \operatorname{Card} \mathcal{P}(N)$ و با توجه به مثال .... $\operatorname{Card} \mathcal{P}(N) = ۲^{\operatorname{Card} N}$. بنابراین

$$\aleph_۰ < \operatorname{Card} \mathcal{P}(N) = ۲^{\operatorname{Card} N} = ۲^{\aleph_۰} = C$$

تمرین.

۱) هرگاه a یک عدد اصلی باشد، ثابت کنید

الف) $a^۰ = ۱$

ب) $a^۱ = a$

ج) $۱^a = ۱$

د) $۰^a = ۰$ $(a \neq ۰)$

(راهنمایی: مستقیماً از تعریف توان اعداد اصلی استفاده کنید)

۲) نشان دهید برای هر عدد اصلی a، $۲^a > a$ (راهنمایی: از قضیه کانتور استفاده کنید)

۳) هرگاه a وb و c و d اعداد اصلی و $a \leq b$ و $۰ < c \leq d$ باشد، $a^c \leq b^d$.

۴) برای هر عدد متناهی $n \geq ۲$، ثابت کنید: $n^{\aleph_۰} = C = \aleph_۰^{\aleph_۰}$

۵) برای هر عدد متناهی $n \geq ۱$، ثابت کنید: $c^{\aleph_۰} = C = C^n$

۶) هرگاه $\mathbb{C}$ مجموعه تمام اعداد مختلط باشد، ثابت کنید $\operatorname{Card} \mathbb{C} = C$

(راهنمایی: $\mathbb{C}$ با مجموعه $R^۲$ همعدد است و به دنبال تابعی یک به یک از $R^۲$ به R باشید و بر عکس)

۷) ثابت کنید $\aleph_۰ c = c$

۸) به کمک قضیه ..... قبل ثابت کنید $CC = C$

۵-۴ اصل موضوع انتخاب

اصول موضوع ریاضی در نگاه اوّل بدیهی به نظر می‌رسند امّا پس از پرداختن عمیق به مباحث اصول موضوعی پیچیدگی آنها برملا می‌شود. مثلاً دو هزار سال پیش وقتی اقلیدس اصل پنجم اقلیدس را اظهار می‌کرد ازهر نقطه خارج یک خط فقط یک موازی می‌توان رسم کرد، بیان کرد همگان بدیهی می‌پنداشتند تا این که در قرن نوزدهم وقتی لباچفسکی اصل دیگری را جایگزین این اصل نمود پیچیدگی و اهمیت اصل پنجم اقلیدس بر همگان آشکار گردید و حتی برخی تا جائی پیش رفتند که در صدد اثبات غلط بودن اصل پنج اقلیدس آمدند (البته هیچ گاه چنین امری محقق نشد).

تمام اصول ریاضی به همان اندازه که ساده و بدیهی می‌نمایند، پیچیده و مرموز هستند و البته مفید. آلبرت انیشتین در یادداشتهای خود اذعان می‌دارد که کشف نسبیت عام در فیزیک مرهون هندسه ریمانی است و فردریش برنهارد ریمان نیزکشف هندسه ریمانی را مدیون جایگزینی اصل پنجم اقلیدس با اصل توازی غیراقلیدسی می‌داند. بسیاری از اصول دیگر نیز جهان ریاضی را دگرگون ساخته‌اند. اصلی را که در این بخش می‌خواهیم تعریف کنیم پذیرش و عدم پذیرش آن بخش مهمی از جهان ریاضی را نظیر جبر خطی، آنالیز و توپولوژی زیر و رو می‌کند. آیا می‌توانید باور کنید بیان ساده این اصل چنین است که « از هر یک از باغهای میوه شهر تبریز می‌توان یک درخت انگور انتخاب کرد» بیایید کمی وسواس به خرج دهیم. اگر تعداد باغهای شهر تبریز نامتناهی و تعداد درختان انگور باغها نامتناهی باشد، چه؟ آیا بازهم مطمئن هستید که می‌توانید چنین کاری را انجام دهید؟ از کدام باغ شروع کنید و اگر باغی را انتخاب کردید، کدام درخت انگور را انتخاب می‌کنید؟ آیا می‌توانید الگوریتمی ارائه دهید که کار را تمام کند یا حداقل به پیش برد. اجازه دهید موضوع را با سؤال دیگری مطرح کنیم، آیا می‌توان از بین مجموعه‌ای از کفشها از هر جفت کفش یک لنگه آن را انتخاب کرد. البته چنین امری ساده است و می‌توانید مثلاً طی

الگوریتمی لنگه‌های راست هر جفت کفش را انتخاب کرد، امّا اگر موضوع انتخاب لنگه‌ای از مجموعه جفت جورابها باشد چه؟ در این حالت بین لنگه‌های چپ و راست تفاوتی وجود ندارد و روند کار حداقل کمی مشکلتر می‌شود.

اصل موضوع انتخاب «شدن» چنین خواسته‌هائی را تضمین می‌کند، گرچه غیر قابل اثبات است. یک قرن تلاش برای چنین «شدنی» بی نتیجه بود و حتی ریاضیدانانی بزرگ چون ارنست ترملو[6] از عهده این کار بر نیامدند و بناچار تصمیم بر آن شد که چنین «شدنی» را به صورت یک اصل موضوع بپذیرند.

۴-۵-۱ اصل انتخاب. فرض کنید مجموعه غیرتهی A متشکل از مجموعه‌هائی باشد که غیر تهی هستند، به عبارت دیگر A مجموعه‌ای است از مجموعه‌های غیرتهی. تابعی مانند

$$f : A \longrightarrow \bigcup_{B \in A} B$$

موسوم به تابع انتخاب وجود دارد که برای هر $B \in A$، $f(B) \in B$

(در مثال قبلی A مجموعه باغهای شهر تبریز و B درختان انگور باغها و $f(B)$ درخت انگوری از بین درخت‌های انگور باغ B است)

علاوه براصل موضوع انتخاب، اصول دیگری نیز به طور مستقل کشف شد امّ بعدها ریاضیدانان دریافتند که علیرغم عدم تشابه، این اصول معادل اصل موضوع انتخاب هستند. در این بخش این اصول را نیز بررسی خواهیم کرد. امّا ابتدا چندین تعریف و قرارداد را مطرح می‌کنیم.

تعریف. رابطهٔ ترتیب جزئی: رابطه $\leq$ روی A ترتیب جزئی نامیده می‌شود. هرگاه انعکاسی، متعدی و پاد متقارن باشد یعنی

$$\forall a \in A : a \leq a$$

$$\forall a, b, c \in A : a \leq b \& b \leq c \Longrightarrow a \leq c$$

$$\forall a, b \in A : a \leq b \Longrightarrow b \not\leq a$$

6) -

۴-۵-۲ تعریف. رابطه ترتیب کلی: رابطه $\leq$ روی A ترتیب کلی نامیده می‌شو. هرگاه ترتیب جزئی بوده و تمام عناصر A قابل مقایسه باشند یعنی به ازای هر دو عضو دلخواه A مانند a و b، $a \leq b$ یا $b \leq a$.

تذکر: در برخی منابع به جای رابطه ترتیب کلی از رابطه ترتیب خطی نیز استفاده می‌شود.

نتیجه. هر مجموعه مرتب کلی، مرتب جزئی است ولی برعکس همواره برقرار نیست.

۴-۵-۳ تعریف. از زیر مجموعه مرتب کلی از یک مجموعه مرتب جزئی یک زنجیر نامیده می‌شود. بدیهی است که هر مجموعه مرتب کلی دارای یک زنجیر می‌باشد.

۴-۵-۴ مثال. به ازای هر مجموعه غیرتهی X، $(P(X), \subseteq)$ یک مجموعه مرتب جزئی است.

تمرین. ثابت کنید $(P(X), \subseteq)$ مرتب کلی نیست هرگاه X حداقل دو عضو داشته باشد.

۴-۵-۵ مثال. مجموعه متشکل از حروف الفبای فارسی و لاتین را با ترتیب متداول آنها در نظر بگیرید مثلاً ب $\leq$ الف و $E \leq F$ و. . .این مجموعه یک مجموعه مرتب جزئی و دارای دو زنجیر می‌باشد.

۴-۵-۶ مثال. در مجموعه اعداد مختلط رابطه $\leq$ را طوری تعریف می‌کنیم که

$$a + ib \leq c + id \Longleftrightarrow (a \leq' c) \vee (a = c \wedge b \leq' d)$$

$(\mathbb{C}, \leq)$ یک مجموعه مرتب جزئی است ($\leq'$ ترتیب معمولی در R است).

تمرین. $(\mathbb{C}, \leq)$ با تعریف فوق متشکل از چند زنجیر است؟ آیا اعداد مختلطی که قسمت حقیقی وموهومی یکسانی دارند، یک زنجیر تشکیل می‌دهند؟

تمرین.

۱) فرض کنید $f : A \longrightarrow B$ یک تابع پوشا باشد. ثابت کنید یک زیرمجموعه A مانند C وجود دارد که C همتوان B است و در نتیجه $\operatorname{Card} A \geq \operatorname{Card} B$.

۲) ثابت کنید $(N, ۱)$ که در آن «۱» رابطه عاد کردن می‌باشد، یک مجموعه مرتب جزئی است زنجیرهای این مجموعه کدامند؟

۳) در Q دو رابطه مثال بزنید که یکی ترتیب جزئی و دیگری ترتیب کلی باشد.

۴) در $\mathbb{R}$ دو رابطه مثال بزنید که یکی ترتیب کلی و دیگری ترتیب جزئی باشد.

۵) فرض کنید A و B دو مجموعه غیرتهی و R یک رابطه از A به B باشد و دامنه R برابر مجموعه A باشد. ثابت کنید تابعی مانند $f : A \longrightarrow B$ وجود دارد که $f \subseteq R$.

۴-۶ اصل ماکسیمال هاسدورف

برای تعریف یکی دیگر از اصول ریاضی به تعریف زیر نیازمندیم.

۴-۶-۱ تعریف. هرگاه $(A, \leq)$ یک مجموعه مرتب جزئی باشد،

الف) عضو $u \in A$ را کران بالای B، یک زیرمجموعه A، می‌گویند هرگاه $\forall b \in B$، $u \geq b$،

ب) $u_\circ$، کران بالای B، کوچکترین کران بالای B است اگر برای هرکران بالای B مانند u، $u_\circ \leq u$،

ج) عضو $e \in A$ را ماکسیمال می‌گویند، هرگاه برای هر $a \in A$، از $e \leq a$ نتیجه شود $e = a$.

تمرین. مشابه تعریف اخیر برای یک مجموعه مرتب جزئی، کران پایین، بزرگترین کران پایین و عضو مینیمال را تعریف کنید.

۴-۶-۲ مثال. فرض کنید X یک مجموعه غیرتهی، $\mathcal{B}$ یک زیرمجموعه مرتب جزئی $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$ است. کوچکترین کران بالای $\mathcal{B}$، $\bigcap_{C \in B} C$، بزرگترین کران پایین B، $\bigcap_{C \in B} C$ می‌باشد.

برای اثبات هم‌ارزی اصل موضوع انتخاب با سایر اصول به قضیه زیر نیازمندیم. این قضیه را بدون اثبات می‌پذیریم.

۴-۶-۳ قضیه. هرگاه $(A, \leq)$ یک مجموعه مرتب جزئی و هر زیرمجموعه مرتب کلی A، کوچکترین کران بالا در A داشته باشد و $f : A \longrightarrow A$ چنان باشد که برای هر $a \in A$، $f(a) \geq a$، آنگاه یک $P \in A$ وجود دارد که $f(p) = P$.

قضیه زیر اثباتی بر اصل ماکسیمال هاسدورف با استفاده از اصل انتخاب است.
(بیاد داشته باشید که هیچ اصلی اثبات نمی‌شود و در حقیقت آنچه در این قضیه بیان می‌شود بیان هم‌ارزی آن با اصل انتخاب است و نه بیشتر)

۴-۶-۴ قضیه. اصل ماکسیمال هاسدورف. هرگاه $\mathcal{A}$ مجموعه تمام زیرمجموعه‌های مرتب کلی مجموعه مرتب جزئی $(A, \leq)$ باشد که $(\mathcal{A}, \subseteq)$ یک مجموعه مرتب جزئی باشد، آنگاه $(\mathcal{A}, \subseteq)$ عنصر ماکسیمال دارد.

اثبات. (برهان خلف) فرض کنید $\mathcal{A}$ عنصر ماکسیمال ندارد، در این صورت برای هر $T \in \mathcal{A}$ مجموعه غیرتهی

$$T^* = \{s \in \mathcal{A} | s \supset T\}$$

نظیر می‌شود. حال بنابراصل انتخاب، تابع g با دامنه $\{T^* | T \in \mathcal{A}\}$ وجود دارد که $g(T^*) \in T^*$. در نتیجه برای هر $T \in \mathcal{A}$ تابع $f : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$ با ضابطه $f(T) = g(T^*) \supset T$. تعریف می‌شود با استفاده از مثال قبل $(\mathcal{A}, \subseteq)$ با تابع f در فرض قضیه صدق می‌کند. امّا برای هر $T \in \mathcal{A}$، $f(T) \supset T$، که یک تناقض است و اثبات قضیه کامل می‌شود.

تمرین.

۱) ثابت کنید کوچکترین کران بالا در صورت وجود منحصر بفرد است (از فرض خلف استفاده کنید)

۲) مثالی ارائه دهید که یک زیرمجموعه کراندار از یک مجموعه مرتب جزئی، نه کوچکترین کران بالا و نه بزرگترین کران پایین داشته باشد.

۳) اگر $X = \{a, b, c\}$ و $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$ یک مجموعه مرتب جزئی باشد، تمام کرانهای بالا و تمام کرانهای پایین، کوچکترین کران بالا و بزرگترین کران پایین مجموعه

$$\{\{a, b\}, \{c, d\}\}$$

را پیدا کنید. عناصر ماکسیمال و مینیمال $\mathcal{P}(X)$ را بیابید.

۴) یک مجموعه مرتب جزئی پایین از یک عضو ماکسیمال و بیش از یک عضو مینیمال مثال بزنید.

۵) ثابت کنید عنصر ماکسیمال و مینیمال یک مجموعه مرتب کلی در صورت وجود منحصر بفرد است (از فرض خلف استفاده کنید)

۶) یک مجموعه مرتب کلی فاقد عضو ماکسیمال و مینیمال مثال بزنید.

۴-۷ لم زرن

در سال ۱۹۱۴ یکی از اصول هم‌ارز اصل انتخاب که در جبر بکار می‌رود موسوم به لم زرن عنوان شد. در قضیه زیر این اصل به کمک اصل ماکسیمال هاسدورف نتیجه خواهد شد. (همانند قضیه قبل در واقع این قضیه به نوعی هم‌ارزی لم زرن را بااصول قبلی نشان می‌دهد ونه بیشتر)

۴-۷-۱ قضیه (لم زرن). هرگاه $(A, \leq)$ مجموعه مرتب جزئی باشد که در آن هر زنجیر یک کران بالا داشته باشد، A عنصر ماکسیمال دارد.

اثبات: $(A, \leq)$ بنابه اصل ماکسیمال هاسدورف زنجیری مانند B دارد که $(B, \subseteq)$ ماکسیمال است. فرض کنید u یک کران بالای B باشد، u بنابه فرض وجود دارد. ثابت می‌کنیم u عنصر ماکسیمال A است. هرگاه $x \in A$ چنان باشد که $x \geq u$، آنگاه $B \cup \{x\}$ یک زیرمجموعه مرتب

کلی $(A, \leq)$ (یک زنجیر) است و شامل زیرمجموعه مرتب کلی ماکسیمال B است. در نتیجه باید $B \cup \{x\} = B$، بنابراین $x \leq u$. یعنی u عنصر ماکسیمال $(A, \leq)$ است.

به کمک لم زرن قضیه زیر را ثابت می‌کنیم.

۲-۷-۴ قضیه. هرگاه A و B دو مجموعه غیرتهی باشند، یا یک تابع یک به یک از A به B وجود دارد یا یک تابع یک به یک از B به A.

اثبات. $\mathcal{D}$ مجموعه تتمام زوجهای (A_a, f_a) راکه در آن A_a یک زیرمجموعه A و $f_a : A_a \longrightarrow B$ یک تابع یک به یک است در نظر می‌گیریم. رابطه $\leq$ را روی $\mathcal{D}$ به شکل زیر تعریف می‌کنیم

$$A_a \subseteq A_b, f_a \subseteq f_b \Longleftrightarrow (A_a, f_a) \leq (A_b, f_b)$$

این رابطه یک ترتیب جزئی است. ثابت می‌کنیم هر زیرمجموعه مرتب کلی $\mathcal{D}$ مانند $\tau = \{(A_\gamma, f_\gamma) | \gamma \in \Gamma\}$ یک کران بالا دارد تااز لم زرن استفاده کنیم کران بالای τ را زوج $(\bigcup_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma, \bigcup_{\gamma\in\Gamma} f_\gamma)$ در نظر می‌گیریم. قرار می‌دهیم $A_1 = \bigcup_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma$ و $f_1 = \bigcup_{\gamma\in\Gamma} f_\gamma$. آنگاه $f_1 : A_1 \longrightarrow B$ با ضابطه $f_1(x) = f_\gamma(x)$ تعریف می‌شود که $x \in A_\gamma$ و $(A_\gamma, f_\gamma) \in \tau$.

ثابت می‌کنیم $f_1 : A_1 \longrightarrow B$ خوشتعریف است. هرگاه x به زیرمجموعه دیگری مانند A_δ که $\delta \in \Gamma$ متعلق باشد، $(A_\gamma, f_\gamma) \leq (A_\delta, f_\delta)$ یا $(A_\delta, f_\delta) \leq (A_\gamma, f_\gamma)$. در هر دو حالت $f_\gamma(x) = f_\delta(x)$ یعنی f_1 خوشتعریف است برای یک به یک بودن f_1، اگر برای x و yای در A_1، $f_1(x) = f_1(y)$، آنگاه (A_γ, f_γ) و (A_δ, f_δ) در τ وجود دارند که $x \in A_\gamma$ و $y \in A_\delta$ همانند قبل یا $(A_\gamma, f_\gamma) \leq (A_\delta, f_\delta)$ یا $(A_\delta, f_\delta) \leq (A_\gamma, f_\gamma)$. اگر نامساوی اوّل درست باشد، $f_\delta(x) = f_\delta(y)$ و بنابراین $x = y$،زیرا f_δ یک به یک است. در نتیجه $f_1 : A_1 \longrightarrow B$ یک به یک است. پس برای هر $\gamma \in \Gamma$، $(A_1, f_1) \geq (A_\gamma, f_\gamma)$ و در نتیجه $(D, \leq)$ در فرض لم زرن صدق می‌کند پس D دارای عنصر ماکسیمال ا ست که با $(\tilde{A}, \tilde{f})$ نشان می‌دهیم. اینک دو حالت پیش می‌آید.

حالت ۱. $\tilde{A} = A$ در این حالت $\tilde{f} : A \longrightarrow B$ یک به یک است و قضیه ثابت شده است.

حالت ۲. $\tilde{A} \neq A$. در این حالت فرض می‌کنیم $x_\circ \in A - \tilde{A}$، ادعا می‌کنیم $\tilde{f} : \tilde{A} \longrightarrow B$ دوسوئی است، زیرا در غیر این صورت عنصر $y_\circ \in B = \tilde{f}(\tilde{A})$ وجود دارد. تابع $\tilde{\tilde{f}} : \tilde{A} \cup \{x_\circ\} \longrightarrow B$ که با ضابطه $\tilde{\tilde{f}}(x_\circ) = y_\circ$ و $\tilde{\tilde{f}}(x) = \tilde{f}(x)$ برای هر $x \in \tilde{A}$ تعریف می‌شود یک به یک است. در نتیجه $(\tilde{A} \cup \{x, \circ\}, \tilde{\tilde{f}}) > (\tilde{A}, \tilde{f})$ که ماکسیمال بودن $(\tilde{A}, \tilde{f})$ را نقض می‌کند. پس $\tilde{f} : \tilde{A} \longrightarrow B$ دوسوئی است و $\tilde{f}^{-1}$ یک به یک است و اثبات کامل می‌شود.

به عنوان نتیجه‌ای از قضیه قبل داریم.

نتیجه. اگر A و B دو مجموعه دلخواه باشند، یا $\operatorname{Card} A \leq \operatorname{Card} B$ یا $\operatorname{Card} B \leq \operatorname{Card} A$. یعنی به ازای هر دو عدد اصلی متمایز a و b، یا $a < b$ یا $b < a$.

تمرین.

۱) هرگاه $(A, \leq)$ مرتب جزئی و هر زنجیر A یک کران پایین داشته باشد. نشان دهید A دارای عنصر مینیمال است (راهنمایی: لم زرن را با اندکی تغییر در ترتیب بکار برید)

۲) از لم زرن، اصل ماکسیمال هاسدورف را نتیجه بگیرید.

۳) ثابت کنید هر فضای برداری یک پایه دارد.
(راهنمایی: مجموعه تمام زیرمجموعه‌های مستقل خطی بردارها را با $\subseteq$ به عنوان یک مجموعه مرتب جزئی درنظر گرفته و لم زرن را بکار ببرید.)

۴) هرگاه A مجموعه‌ای با بیش از یک عضو باشد، ثابت کنید نگاشت دو سوئی مانند $f : A \longrightarrow A$ وجود دارد که برای هر $x \in A$، $f(x) \neq x$.

۴-۸ اصل خوشترتیبی

لم زرن اصل موضوعی در نظریهٔ مجموعه‌ها ظاهر می‌سازد که ارنست زرملو آن را بیان کرده است قبل از بیان این اصل به تعریف زیر نیازمندیم.

۴-۸-۱ تعریف. مجموعهٔ مرتب کلی $(A, \leq)$ خوشترتیب گفته می‌شود، هرگاه هر زیرمجموعه ناتهی A مانند B دارای عنصر مینیمال (منحصر بفرد) باشد. یعنی هرگاه عنصری مانند $b \in B$ وجود داشته باشد که برای هر $x \in B$، $b \leq x$. عنصر b را کوچکترین عنصر B می‌نامند. اگر $(A, \leq)$ خوشترتیب باشد، رابطه $\leq$ را رابطه خوشترتیبی می‌نامند.

۴-۸-۲ مثال. N با رابطه $\leq$ خوشترتیب است ولی Q با رابطه $\leq$ خوشترتیب نیست!
مجموعه A را خوشترتیب می‌گویند هرگاه یک رابطه خوشترتیبی روی A وجود داشته باشد، توجه داشته باشید که یک مجموعه ممکن است با یک رابطه ترتیب کلی خوشترتیب نباشد ولی «بتوان» چنان رابطه ترتیب کلی دیگری بر آن تعریف کرد که آن را خوشترتیب کند، اصلی را که می‌خواهیم بیان کنیم اذعان می‌کند واژه «بتوان» را «می‌توان» نیز می‌توان کرد.
در نهایت ناباوری:

۴-۸-۳ قضیه ۵. (اصل خوشترتیبی). هرمجموعه خوشترتیب شدنی است.

اثبات. H را مجموعه‌ای دلخواه می‌گیریم و ثابت می‌کنیم خوشترتیب است. مجموعهٔ تمام مجموعه‌های خوشترتیب $(A_\circ, \leq_\circ)$ را که $A_\circ \subseteq H$ موسوم به A^* در نظر بگیرید. A^* را با ترتیب زیر مرتب جزئی می‌کنیم. $(A_\circ, \leq_\circ) \leq^* (A_1, \leq_1)$ هرگاه:

(یک) $A_\circ \subseteq A_1$

(دو) $x, y \in A_\circ$ و $x \leq_\circ y$ نتیجه می‌دهد $x \leq_1 y$

(سه) $x \in A_1 - A_\circ$ نتجیه می‌دهد که برای تمام $y \in A_\circ$، $y \leq_1 x$

برای بکارگیری از لم زرن نشان می‌دهیم هر زیرمجموعه مرتب کلی $(A^*, \leq^*)$ مانند B کران بالا دارد. این کران بالا را $(\bigcup_{A \in B} A, \leq')$ در نظر می‌گیریم که $x \leq' y$ اگر و فقط اگر x و y به یک $A_\circ$ متعلق باشند به طوری که $(A_\circ, \leq_\circ) \in B$ و $x \leq_\circ y$. حال اگر $(\bigcup_{A \in B} A, \leq')$ متعلق به A^* باشد، $(\bigcup_{A \in B} A, \leq')$ یک کران بالای B خواهد بود.

ثابت می‌کنیم $(\bigcup_{A\in B} A, \leq')$ خوشترتیب است و متعلق به A^* است.

با وجود اینکه توانستیم اصل خوشترتیبی را ثابت کنیم، با این حال تاکنون کسی « نتوانسته است» مجموعه اعداد حقیقی را حوشترتیب کند. بیاد داشته باشیم که این قضیه با تسلسلی پایا به اصل موضوع انتخاب برمی‌گردد، به عبارت دیگر، شاید دلیل «نتوانستن» این امر به این برگردد که هنوز نتوانسته‌ایم درخت انگوری را از هر باغ شهر تبریز انتخاب کنیم و یا هنوز به دنبال راه حلی برای انتخاب لنگه‌ای از جورابها سرگردانیم!

اصل خوشترتیبی، اصل ماکسیمال هاسدورف، لم زرن و اصول هم‌ارز آن نمونه‌هائی از قضایای «وجودی» و «غیرساختنی» هستند. در حقیقت برهان قضیه اصل خوشترتیبی هیچ راهی برای خوشترتیب «شدن» ارائه نمی‌دهد بلکه فقط از «وجود» آن خبر می‌دهد. همانطوری که اصول هندسه اقلیدسی از چگونگی مفاهیم اولیه نظیر نقطه و خط بدرستی نمی‌گوید بلکه نحوه بکارگیری نقاط و خط را به ما می‌آموزد. اصول و نتایج آنها چنین‌اند، زیبا امّا متزلزل.

در ادامه این بحث هم‌ارزی چهار اصل را تکمیل می‌کنیم و با بیان این قضیه تسلسل منطقی زیر را خواهیم داشت:

اصل انتخاب $\Leftarrow$ اصل ماکسیمال هاسدورف $\Leftarrow$ لم زرن $\Leftarrow$ اصل خوشترتیبی $\Leftarrow$ اصل موضوع انتخاب

۴-۸-۴ قضیه. از اصل خوشترتیبی، اصل انتخاب نتیجه می‌شود.

برهان. هرگاه $\mathcal{A}$ یک مجموعه غیرتهی و عضوهای آن مجموعه‌های غیرتهی باشند بنابه اصل خوشترتیبی رابطه ترتیب کلی $\leq$ وجود دارد که $(\bigcup_{A\in\mathcal{A}} A, \mathcal{A}, \leq)$ خوشترتیب است. در نتیجه هر مجموعه $A \in \mathcal{A}$ شامل کوچکترین عضو است. حال برای هر $A \in \mathcal{A}$، $f : \mathcal{A} \longrightarrow \bigcup_{A\in\mathcal{A}} A$، یعنی $f(A)$ را کوچکترین عنصر A می‌گیریم. این تابع خوش‌تعریف بوده و یک تابع انتخاب است. بنابراین اصل انتخاب نتیجه می‌شود.

۴-۸-۵ نتیجه. چهار اصل انتخاب، ماکسیمال هاسدورف، لم زرن و خوشترتیبی هم‌ارز هستند.

تمرین.

۱) نشان دهید $(\mathbb{R}, \leq)$ که در آن $\leq$ همان رابطه معمولی کوچکتر یا مساوی اعداد حقیقی است، خوشتعریف نیست.

۲) مستقیماً ثابت کنید Q خوشترتیب است. (برای زیرمجموعه‌ای در Q بدنبال عضو مینیمال بگردید)

۳) ثابت کنید هرزیر مجموعه یک مجموعه خوشترتیب، تحت رابطه القائی، خوشترتیب است.

۹-۴ اصل استقرای ترامتناهی

برای تعریف یک اصل جدید به تعریف جدیدی نیازمندیم.

۱-۹-۴ تعریف. اگر $(A, \leq)$ یک مجموعه مرتب کلی باشد، یک قطعه از A زیرمجموعه‌ای مانند S از A است که اگر $y \in S$ و $x \in A$ و $x \leq y$، آنگاه $x \in S$. یک قطعه سره A، قطعه‌ای است که زیرمجموعه سره A است.

مثال. فرض کنید $(A, \leq)$ یک مجموعه خوشترتیب و $x \in A$. آنگاه ϕ، A و $A_x = \{a \in A | a < x\}$ قطعه‌های A هستند.

۲-۹-۴ قضیه. اگر $(A, \leq)$ خوشترتیب باشد، آنگاه

الف) هر اجتماع یا اشتراک قطعه‌های A و تمام قطعه‌های یک قطعه A نیز قطعه‌های A هستند

ب) هرگاه S قطعه‌ای از A و به جز A باشد $x \in A$ای وجود دارد که $S = A_x$ که در آن

$$A_x = \{a \in A | a < x\}$$

اثبات. الف). اگر $\mathcal{T}$ یک خانواده از قطعه‌های A باشد و $y \in \bigcup_{s\in\mathcal{T}} S$.
هرگاه $x \in A$ و $x \leq y$. آنگاه چون y به یک قطعه $S_\circ \in \mathcal{T}$ متعلق است، بنابراین $x \in S_\circ$ و در نتیجه $x \in \bigcup_{s\in\mathcal{T}} S$. بنابراین $\bigcup_{s\in\mathcal{T}} S$ یک قطعه A است. به همین ترتیب اشتراک خانواده $\mathcal{T}$ از قطعه‌های A، یک قطعه A است.

فرض کنید S یک قطعه A و T یک قطعه S است. فرض کنید $y \in T$ و $x \in A$ و $x \leq y$، باید نشان دهیم $x \in T$. چون y به قطعه S تعلق دارد، $x \in S$. در نتیجه از $y \in T$، $x \in S$ و $x \leq y$ و از اینکه T یک قطعه S است، داریم $x \in T$. یعنی T یک قطعه از A است.

ب). اگر S یک قطعه از A باشد که $S \neq A$، آنگاه مجموعه ناتهی $A - S$ یک عنصر مینیمال مانند x دارد. می‌توان نتیجه گرفت $S = A_x$ (چرا؟).

قضیه زیر را برای اثبات اصل استقرای ترامتناهی بدون اثبات می‌پذیریم.

۴-۹-۳ قضیه. فرض کنید $(A, \leq)$ یک مجموعه خوشترتیب و S یک مجموعه از قطعه های A است. به طوری که

۱) هر اجتماع عضوهای S به S تعلق دارد؛

۲) اگر $A_x \in S$ آنگاه $A_x \cup \{x\} \in S$.

در این صورت S شامل تمام قطعه‌های A است.

۴-۹-۴ قضیه (اصل استقرای ترامتناهی). فرض کنید $(A, \leq)$ یک مجموعه خوشترتیب است. برای هر $x \in A$ فرض کنید $P(x)$ گزاره‌ای در باره x است. اگر برای هر $x \in A$، فرض « $P(y)$ برای هر $y < x$ راست است» نتیجه دهد « $P(x)$ راست است»، آنگاه $P(x)$ برای هر $x \in A$ راست است.

اثبات. فرض کنید یک xای وجود دارد که $P(x)$ دروغ است. آنگاه $B = \{x \in A | P(x)$ دروغ است$\}$ یک زیرمجموعه غیرتهی A است و بنابراین عنصر مینیمالی مانند $x_\circ$ دارد. چون $x_\circ \in B$ پس $P(x_\circ)$ دورغ است. اگر $y \in A$ و $y < x_\circ$ آنگاه $y \notin B$ و بنابراین $P(y)$ راست است. پس $P(y)$

برای هر $x < y_\circ$ راست است. بنابراین $P(x_\circ)$ راست است و این با $P(x_\circ)$ دروغ است تناقض دارد. در نتیجه $P(x)$ برای هر $x \in A$ راست است.

در قضیه بعدی اصل استقرای ترامتناهی را در احکام ریاضی بکار می‌بریم. این مثال اهمیت این اصل را نشان می‌دهد. ابتدا به تعریف زیر نیاز داریم.

هرگاه $(A, \leq)$ و $(B, \leq')$ مجموعه‌های خوشترتیب باشند تابع $f : A \longrightarrow B$ صعودی گفته می‌شود هرگاه از $a \leq a'$ در $(A, \leq)$ به $f(a) \leq' f(a')$ در $(B, \leq')$ برسیم و اکیداً صعودی گفته می‌شود اگر از $a < a'$ در $(A, \leq)$ به $f(a) <' f(a')$ در $(B, \leq')$ برسیم.

۴-۹-۵ مثال.

$$B = \{-۱, -۲, -۳, -۴\}, \qquad A = \{۱, ۲, ۳, ۴, \cdots\}$$

و $\leq$ و $\leq'$ را همان ترتیب بکار رفته در A و B به شکل بالا در نظر بگیرید، فرض کنید $f(x) = -x$. f اکیداً صعودی است.

تمرین. در مثال قبل ترتیب بکار رفته در A و B را چنان عوض کنید که تابع f صعودی باشد ولی اکیداً صعودی نباشد.

تمرین. اگر تابع f اکیداً صعودی باشد، ثابت کنید صعودی است.

تمرین. $(A, \leq)$ و $(B, \leq')$ را دو مجموعه خوشترتیب و $f : A \longrightarrow B$ صعودی بوده و $f(A)$ یک قطعه B است. ثابت کنید f هر قطعه A را به یک قطعه B می‌برد.

۴-۹-۶ قضیه. فرض کنید $(A, \leq)$ و $(B, \leq')$ مجموعه‌های خوشترتیب باشند. اگر $f : A \longrightarrow B$ صعودی باشد، $f(A)$ یک قطعه از B است اگر $g : A \longrightarrow B$ اکیداً صعودی باشد، آنگاه برای هر $x \in A$، $f(x) \leq' g(x)$.

اثبات. برای استفاده از استقرای ترامتناهی برای هر $x \in A$، $P(x)$ را گزاره « $f(x) \leq' g(x)$» فرض می‌کنیم برای اینکه نشان دهیم قضیه قبل برقرار است، برخلاف فرض حکم فرض می‌کنیم عضوی مانند $a \in A$ وجود دارد که $P(x)$ برای هر $x < a$ راست است، امّا $P(a)$ دورغ است

یعنی برای هر $x < a$، $f(x) \leq' g(x)$ و $g(a) <' f(a)$. چون g اکیداً صعودی و f صعودی است برای هر $x < a$ و هر $y \geq a$ داریم

$$f(x) \leq' g(x) <' g(a) <' f(a) \leq' f(y)$$

و در نتیجه $g(a) <' f(a)$ و $g(a) \notin f(A)$ که قطعه بودن $f(A)$ در B را نقض می‌کند. بنابراین برای هر $x \in A$، اگر برای هر $y < x$، $f(y) \leq' g(y)$، آنگاه $f(x) \leq' g(x)$. بنابر اصل استقرای ترامتناهی برای هر $x \in A$، $f(x) \leq' g(x)$.

این فصل را برای تکمیل آموخته‌های خود با طرح مسائلی متنوع به پایان می‌بریم. در هر مسئله راهنماییهای لازم را ارائه می‌دهیم و انتظار می‌رود با اندکی تلاش بتوانید این مسائل را حل کنید.

تمرین‌های مروری فصل.

۱) هرگاه $a < b$ باشد $a + c < b + c$ لزوماً برقرار نسبت a، b و c اعداد اصلی هستند.
(راهنمایی: مثال نقضی ارائه دهید.)

۲) هرگاه $a \leq b$ و $c \leq d$ باشد آنگاه $ac \leq bd$ است.
(راهنمایی: برای حل مسئله از دو تابع مناسب و ضرب دکارتی استفاده نمائید)

۳) هرگاه A شمارای نامتناهی باشد، $P(A)$ ناشماراست. (راهنمایی: از قضیه کانتور استفاده کرده و فرض خلف را بکاربرید)

۴) هرگاه $x = y$، نشان دهید $xz = yz$
(راهنمایی: از مجموعه‌های متناظر اعداد اصلی x و y استفاده کنید)

۵) ثابت کنید عدد اصلی $\mathbb{C}$ برابر عدد اصلی $\mathbb{R}$ است.
(راهنمایی: $C.C = C$)

۶) با استفاده ز لم زرن ثابت کنید هر دو مجموعه دلخواه از لحاظ عدد اصلی قابل مقایسه هستند. (راهنمایی: برای اثباتی به طریقه مستقیم و بدون استفاده از لم زرن به کتاب نظریه طبیعی مجموعه‌ها تألیف هالموس مراجعه کنید، البته می‌توان به کمک لم زرن این مسئله را حل کرد.)

۷) عدد اصلی مجموعه تمام زیرمجموعه‌های متناهی یک مجموعه شمارای نامتناهی را بدست آورید.

تاریخچه اصل موضوع انتخاب و فراز و نشیبهای آن. این اصل برای اولین بار توسط کانتور در دهه ۱۸۸۰ در برهان بعضی از قضایا بکار رفته است بی آنکه به طور رسمی به این اصل اشاره شود.

شکل صریح این اصل در سال ۱۹۰۴ توسط زرملو مطرح گردید و از آن در اثبات قضیه خوشترتیبی استفاده شد.

پس از طرح این اصل یک دهه ریاضیدانان برخی به دنبال راه حلی برای رد اصل موضوع انتخاب بودند امّا از طرفی ناپیوندی ناگسستنی بین این اصل و اصل خوشترتیبی ملاحظه می‌کردند و به این نکته پی بردند که رد اصل موضوع انتخاب تنها شاخه‌ای از ریاضیات را شامل می‌شود که در آن مسائل «ساختنی» وجود دارد و رده مسائل «وجودی» را باید کنار گذاشت.

طرح اصل موضوع انتخاب شاخه فلسفی جدیدی را در ریاضیات سبب گردید که به مفهوم سازگاری رقم زد. (برای اطلاعات کافی در زمینه سازگاری اصول به کتاب فلسفه علم ریاضی تألیف دکتر محمدحسن بیژن‌زاده، انتشارات پیام نور مراجعه کنید.)

در سال ۱۹۳۸ کورت گودل[7] ثابت کرد افزودن اصل موضوع انتخاب به دیگر اصول ریاضی هیچ تناقضی را ظاهر نمی‌کند و سازگار با سایر اصول است.

در سال ۱۹۶۳ پل کوهن[8] ثابت کرد اصل موضوع انتخاب مستقل از سایر اصول ریاضی است و این کشف به تردید در مورد قضیه بودن اصل موضوع انتخاب پایان داد.

این کتاب برای تدریس در رشته‌های ریاضی، آمار و کامپیوتر تدوین گردیده است، با این حال منابع زیر را برای مطالعه اضافی خصوصاً دانشجویانی که در رشته ریاضی تحصیل می‌کنند، توصیه می‌کنیم.

الف: منابع فارسی.

۱) آنالیز ریاضی جلد اوّل، تألیف دکتر غلامحسین مصاحب؛

7) K. Gödel 8) P. Cohen

۲) تئوری مقدماتی مجموعه‌ها، تألیف دکتر علیرضا جمالی، انتشارات دانشگاه پیام نور؛

۳) مبانی ریاضیات، تألیف دکتر حسین دوستی، دکتر غلامرضا جهانشاهلو، انتشارات دانشگاه تربیت معلم؛

۴) تئوری مقدماتی مجموعه‌ها، تألیف دکتر محمد چایچی، انتشارات دانشگاه پیام‌نور؛

۵) نظریهٔ مجموعه‌ها و کاربردهای آن، تألیف شودینگ تی- لین دیو- فنگ لین، ترجمهٔ عمید رسولیان، انتشارات مرکز نشر دانشگاهی؛

۶) فلسفه علم ریاضی، تألیف دکتر محمدحسن بیژن‌زاده، انتشارات دانشگاه پیام‌نور

ب: منابع لاتین.

1- Elements of set theory, Herbert B. Enderton.

2- Axiomatic set theory, Suppes Patrick (1960).

3- Naive set theory, Halmos. P (1960).

4- From Frege to Godel. Van Heijendort. J (1967).

5- An introduction of the law of thought Boole. G (1954).

خواندنی. در پایان فصل نگاهی به زندگینامه کانتور می‌اندازیم. ریاضیدانی که نام او با نظریهٔ مجموعه‌ها عجین شده است و به جرأت می‌توان او را متهورترین ریاضیدان تاریخ نامید که در زمان حیات خویش فلسفه ریاضیات را با نظریات خود دگرگون کرد.

گئورگ کانتور در سال ۱۸۴۵ در شهر سنتز پترزبورگ روسیه بدینا آمد. دوران کودکی وی با علاقه به ویولن و موسیقی گذشت، خانواده او در سال ۱۸۵۶ به آلمان مهاجرت کردند. در سال ۱۸۶۰ از دبیرستان فارغ‌التحصیل شد و در سال ۱۸۶۳ وارد پلی‌تکنیک فدرال شد. و در سال ۱۸۶۶ به دانشگاه کوتنگین وارد شد، در سال ۱۸۶۷ در برلین از رسالهٔ دکترای خود تحت عنوان «تئوری اعداد» دفاع کرد. در ۲۹ سالگی با دختری به نام والی گ‌وتمن ازدواج کرد و حاصل این ازدواج شش فرزند بود.

کانتور قضیه جنجال‌برانگیز خود را در سال ۱۸۸۴ مطرح کرد و سیل اعتراضات را رودروی خود دید. ریاضیدانان نامی چون لیوویلد کرونکر، هانری پوانکاره، هرمان وایل، براور، لودریک و یتگنشتاین از جمله افرادی بودند که بسیار خصمانه و حتی گاهی بی ادبانه براو تاختند و این شاید یکی از اوراق چرکین تاریخ ریاضیات باشد که تاکنون زدوده شده است. کلیسا نیز در این رهگذر بی نصیب نبود و او را به ضدیت با وحدانیت خدا متهم کرد. هانری پوانکاره نظریات کانتور را انگاشت، کرونکر او را یک شارلاتان ریاضی نامید و در سال ۱۸۹۹ سرنوشت تقدیری دردناک برآلام کانتور افزود او فرزند جوان خود رودلف را از دست داد.

کانتور در سال ۱۹۰۴ مدال سیلوستر را از انجمن سلطنتی دریافت کرد. شاید تنها پشتیبان علمی او دیوید هیلبرت بود که در مورد کانتور اظهار کرده بود: «هیچ کس نخواهد توانست ما را از بهشتی که کانتور پدید آورده است محروم سازد» نظریات کانتور به دو دلیل جهان ریاضی را به چالش کشید، نخست آنکه از ژرفای ریاضی عمیقی برخوردار بود والبته انقلابی؛ اعداد اصلی نامتناهی به یک اندازه بزرگ نیستند، برخی از دیگری بزرگترند، گرچه هر دو نامتناهی‌اند.
و دلیل دوّم بعد فلسفی آن بود؛ اعداد وجود ندارند و نمی‌توانیم آنها را تعریف کنیم. اندیشه توانای کانتور در تقابل با اعتراضات عصر خویش سرانجام غمگینی را رقم زد و در اواخر عمر به افسردگی وی منجر شد او بارها بستری گردید و سرانجام در سال ۱۹۱۶ در شرایطی درگذشت که بسیاری از دانشمندان افکار او را نتوانستند درک کنند.